

ГЕТИКА

Серия основана
в 2002 г.

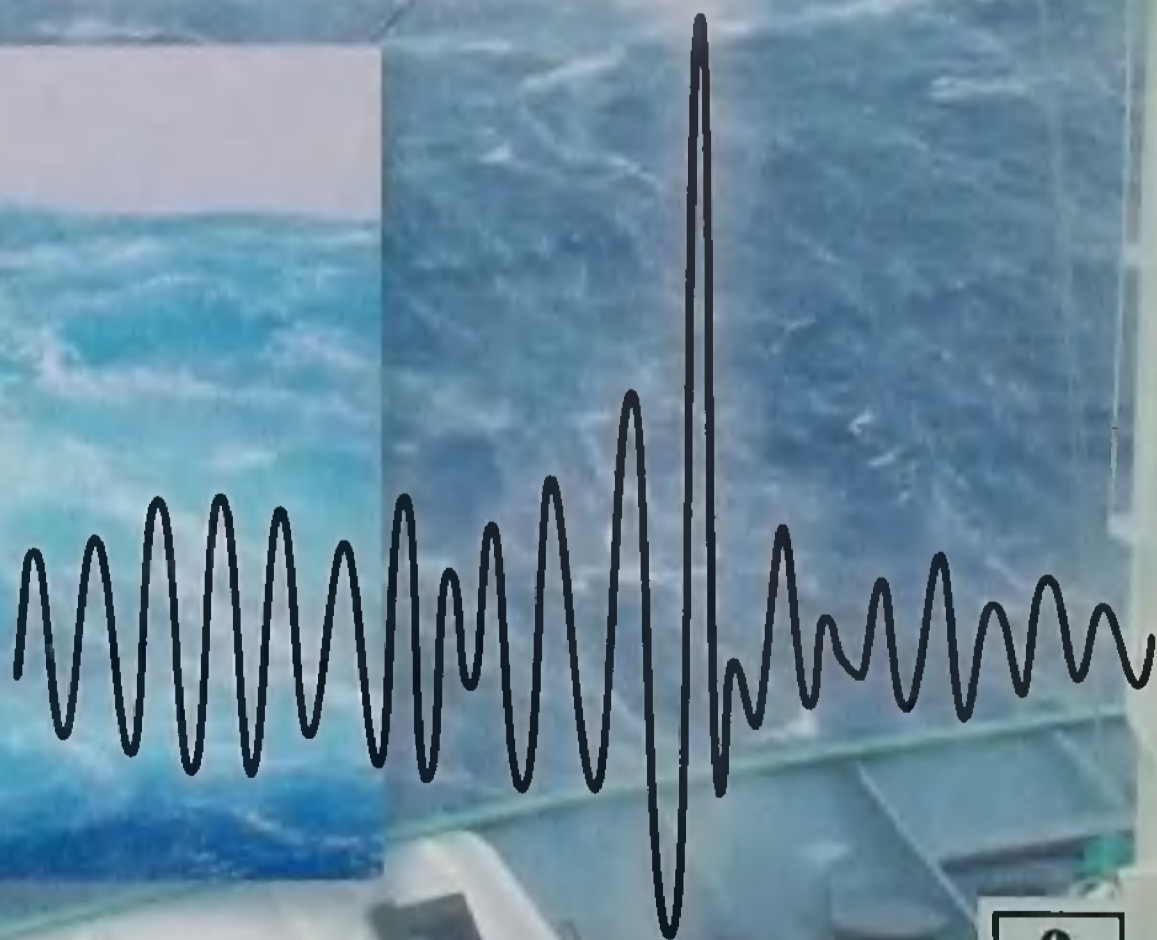
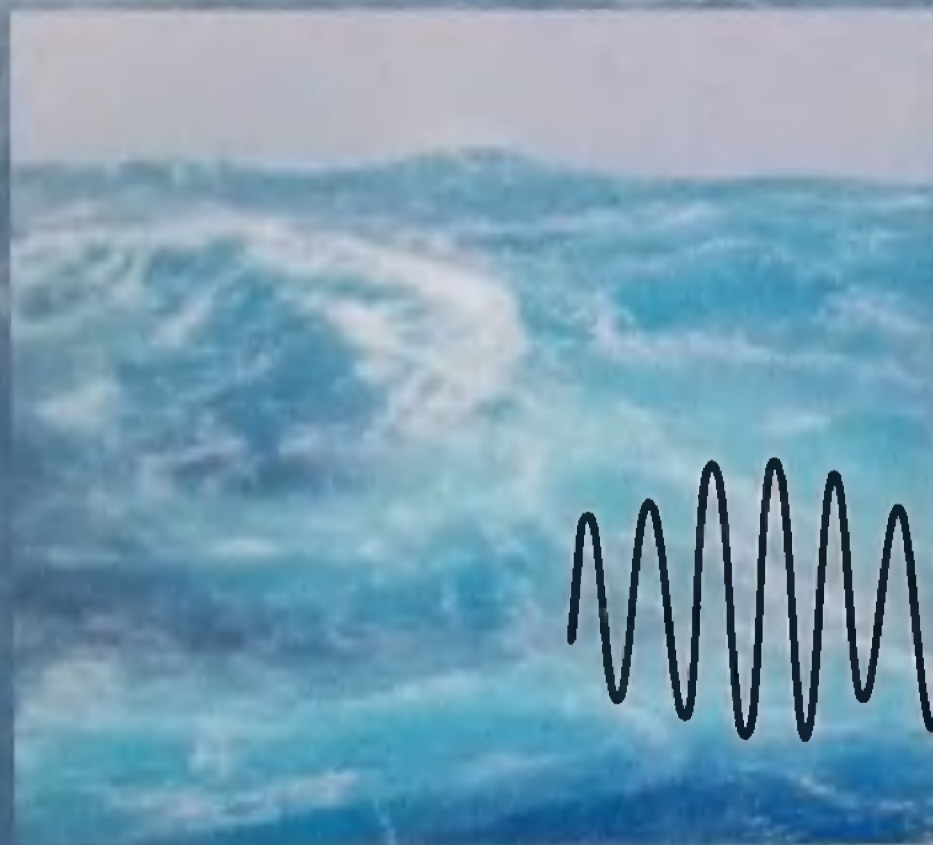
От прошлого
к будущему

Председатель редколлегии
профессор
Г. Г. Малинецкий

№ 76

Р. В. Шамин

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ВОПРОСЫ
ВОЛН-УБИЙЦ**



URSS

Р. В. Шамин

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ВОПРОСЫ
ВОЛН-УБИЙЦ**



URSS

МОСКВА

ББК 22.1п 22.253.3 22.318 26.22

УДК 004.94:551.46

Ш19

Шамин Роман Вячеславович

Математические вопросы волн-убийц. — М.: ЛЕНАНД, 2016. — 168 с.
(Сивергетика: от прошлого к будущему. № 76.)

Книга посвящена актуальной теме возникновения волн-убийц в океане. Эти волны экстремальной амплитуды возникают внезапно в спокойном море и являются причиной гибели кораблей и нефтяных платформ. В монографии волны-убийцы изучаются с помощью вычислительных экспериментов. Изложены основы статистической и качественной теории аномально больших волн в океане, а также математические основы современной гидродинамики со свободной поверхностью в конформных переменных.

Книга будет полезна специалистам в области океанологии, математики, физики, а также широкому кругу читателей, интересующихся современным состоянием нелинейной науки.

РОССИЙСКАЯ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ
БИБЛИОТЕКА

Рецензент:

главный научный сотрудник Института прикладной физики РАН, лауреат Государственной премии РФ, д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. Н. Пелиновский*

Формат 60·90 16. Печ. л. 10,5. Зак. № АХ-398.

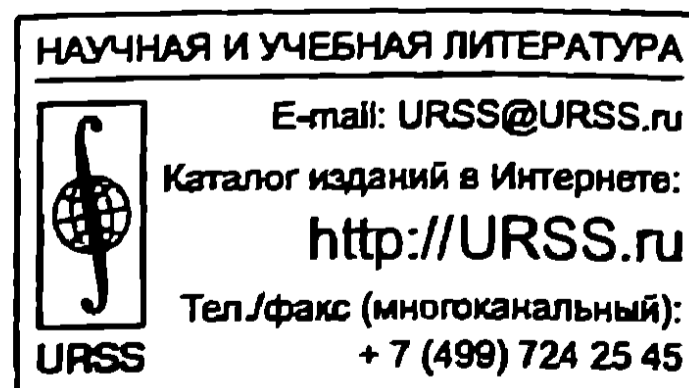
Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-9710-2653-2

© ЛЕНАНД, 2016

18776 ID 205521



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

От редакции

Издательство URSS продолжает серию книг «Синергетика: от прошлого к будущему».

Синергетика, или теория самоорганизации, сегодня представляется одним из наиболее популярных и перспективных междисциплинарных подходов. Термин «синергетика» в переводе с греческого означает «совместное действие». Вводя его, Герман Хакен вкладывал в него два смысла. Первый — теория возникновения новых свойств у целого, состоящего из взаимодействующих объектов. Второй — подход, требующий для своей разработки сотрудничества специалистов из разных областей.

И это привело к замечательному эффекту — синергетика начала оказывать все большее влияние на разные сферы деятельности и вызывать все больший интерес. Сейчас этим подходом интересуются очень многие — от студентов до политиков, от менеджеров до активно работающих исследователей.

Синергетика прошла большой путь. Тридцать лет назад на нее смотрели как на забаву физиков-теоретиков, увидевших сходство в описании многих нелинейных явлений. Двадцать лет назад благодаря ее концепциям, методам, представлениям были экспериментально обнаружены многие замечательные явления в физике, химии, биологии, гидродинамике. Сейчас этот междисциплинарный подход все шире используется в стратегическом планировании, при анализе исторических альтернатив, в поиске путей решения глобальных проблем, вставших перед человечеством.

Название серии «Синергетика: от прошлого к будущему» тоже содержательно. Как говорил один из создателей квантовой механики, при рождении каждая область обычно богаче идеями, чем в период зрелости. Видимо, не является исключением и синергетика. Поэтому мы предполагаем переиздать часть «синергетической классики», сделав акцент на тех возможностях и подходах, которые пока используются не в полной мере. При этом мы надеемся познакомить читателя и с рядом интересных работ, ранее не издававшихся на русском языке.

«Настоящее» — как важнейший элемент серии — тоже понятно. В эпоху информационного шума и перманентного написания то заявок на гранты, то отчетов по ним даже классики синергетики очень немного знают о последних работах коллег и новых приложениях. Мы постараемся восполнить этот пробел, представив в серии исследования, которые проводятся в ведущих научных центрах страны.

«Будущее...» — это самое важное. От того, насколько ясно мы его представляем, зависят наши сегодняшние усилия и научная стратегия. Прогнозы — дело неблагодарное, хотя и совершенно необходимое. Поэтому ряд книг серии мы надеемся посвятить и им.

В редакционную коллегию нашей серии любезно согласились войти многие ведущие специалисты в области синергетики и нелинейной динамики. В них не следует видеть «свадебных генералов». В их задачу входит анализ развития нелинейной динамики в целом и ее отдельных областей, определение приоритетов нашей серии и подготовка предложений по изданию конкретных работ. Поэтому мы указываем в книгах серии не только организации, в которых работают эти исследователи, но и важнейшие области их научных интересов.

И конечно, мы надеемся на диалог с читателями. При создании междисциплинарных подходов он особенно важен. Итак, вперед — в будущее.

В нашей серии вышло уже более семидесяти книг. Книги серии издаются нами еще и на испанском языке. Однако мы уверены, что и самые глубокие проблемы синергетики, и самые интересные книги серии впереди.

*Редакционная коллегия серии
«Синергетика: от прошлого к будущему»*

Председатель редколлегии:

Г. Г. Малинецкий, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (сложность, хаос, прогноз).

Члены редколлегии:

Р. Г. Баранцев, Санкт-Петербургский государственный университет (асимптотология, семиодинамика, философия естествознания).

А. В. Гусев, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (вычислительная гидродинамика, технологии, медицина).

А. С. Дмитриев, Институт радиоэлектроники РАН (динамический хаос, защита информации, телекоммуникации).

В. П. Дымников, Институт вычислительной математики РАН (физика атмосферы и океана, аттракторы большой размерности).

С. А. Кащенко, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова (асимптотический анализ нелинейных систем, образование, инновации).

И. В. Кузнецов, Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН (анализ временных рядов, вычислительная сейсмология, клеточные автоматы).

И. Г. Поспелов, Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН (развивающиеся системы, математическая экономика).

Ю. Д. Третьяков, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (наука о материалах и наноструктуры).

Д. И. Трубецков, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (теория колебаний и волн, электроника, преподавание синергетики).

Д. С. Чернавский, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН (биофизика, экономика, информация).

Наш электронный адрес — synergy@keldysh.ru

Оглавление

Предисловие	9
Введение	11
I Вычислительные эксперименты	14
Глава I. Волны-убийцы в океане: натурные данные и численные расчеты	15
1. Описания волн-убийц	15
1.1. Исторические замечания	15
1.2. Обзор методов исследования волн-убийц	16
1.3. Об опасности волн-убийц	18
2. Различные подходы к теоретическому изучению волн-убийц	19
3. О натурных наблюдениях волн-убийц	20
3.1. Ветровое волнение и экстремальные поверхностные волны	20
3.2. Некоторые известные случаи встреч с волнами-убийцами	22
3.3. Сравнение натурных данных и численного моделирования	22

Глава II. Уравнения гидродинамики для описания волн на воде	29
4. Уравнения гидродинамики	29
4.1. Уравнения Эйлера	29
4.2. Уравнения гидродинамики со свободной поверхностью	31
4.3. Уравнения гидродинамики со свободной границей в конформных переменных	34
4.4. Уравнения гидродинамики с конечным дном	39
5. Уравнения с учетом внешних воздействий	42
6. Стационарные волны	42
 Глава III. Вычислительные эксперименты по моделированию волн-убийц	 45
7. Постановка вычислительных экспериментов	45
7.1. Динамические уравнения с накачкой и диссипацией	45
7.2. Построение начальных условий	46
7.3. Критерий волн-убийц	47
8. Численная схема	48
 Глава IV. Статистические характеристики волн-убийц	 51
9. О вероятности волны-убийцы	51
9.1. Распространение волн как квазислучайный процесс	51
9.2. Распределение высот	52
9.3. Интенсивность возникновения волн-убийц	54
10. Результаты вычислительных экспериментов и статистика экстремальных волн	54
11. Оценка вероятности встречи с волной-убийцей	59
12. О законе распределения времени ожидания волн-убийц	60
12.1. Гипотеза об экспоненциальном законе	60
12.2. Статистическая проверка гипотезы	61
12.3. Случай с одинаковыми параметрами волнения	61
12.4. Случай смешанных параметров волнения	64
 Глава V. Характеристики волн-убийц	 66
13. Процессы концентрации энергии и импульса	66
13.1. Формальная модель концентрации параметров отдельных волн	66
13.2. Характерный пример концентрации параметров волн в момент формирования волны-убийцы	68

13.3. Корреляция между концентрацией энергии и максимальной амплитудой	68
14. Типичные профили волн-убийц	73
14.1. «Стена воды», «дырка в море» и «три сестры»	73
14.2. Сплайн-аппроксимация профиля волны-убийцы	74
14.3. Распределение параметров профилей волн-убийц	76
Глава VI. Обнаружение и предсказание волн-убийц	77
15. Оперативный прогноз волн-убийц	77
16. Возможности дистанционного обнаружения волн-убийц	79
17. Вопросы обнаружения волн-убийц с помощью волнограмм	82
II Математические вопросы	87
Глава VII. Уравнения, описывающие волны на воде	88
18. Основные уравнения	88
18.1. Функциональные пространства	88
19. Корректность математической модели	90
19.1. Шкала гильбертовых пространств	90
19.2. Разрешимость уравнений	95
20. Конструктивное исследование уравнений, описывающих волны на воде	98
20.1. Эволюционное уравнение	98
20.2. Применение к уравнениям, описывающим поверхностные волны	102
20.3. Метод оценочных функционалов	103
20.4. Методы построения точных решений эволюционных уравнений	106
20.5. Аппроксимация дифференциальными включениями	112
20.6. Построение точных решений уравнений, описывающих волны на воде	116
Глава VIII. Численные методы	119
21. Вычисление приближенных решений	119
21.1. Общие численные методы	119
21.2. Регуляризация ошибок машинной арифметики	126
21.3. Конструктивное определение времени существования решений	139

22. Вычислительная устойчивость решений, описывающих волны-убийцы	144
22.1. Корректность определения волны-убийцы	144
22.2. Устойчивость решений уравнений	147
22.3. Эксперименты по устойчивости волн-убийц при внешних воздействиях	149
Заключение	153
Литература	156

Предисловие

В последнее время тема волн-убийц в океане приобретает большую популярность среди океанологов, физиков, математиков. При этом построения какой-либо полной теории экстремальных поверхностных волн пока не существует. Хотя аналоги волн-убийц можно найти во многих областях науки. Резкое возрастание концентрации в волновых процессах можно наблюдать в решениях многих нелинейных уравнений. Кроме того, «волны-убийцы» наблюдаются в популяционной динамике, при распространении эпидемий, наводнения и ураганы тоже примеры концентрации. Также эти явления известны во многих социальных явлениях — экономические кризисы можно рассматривать в качестве примера экстремальных волн (колебания котировок на бирже), автомобильные пробки часто представляют собой внезапную концентрацию автомобилей. Подобных примеров можно привести большое количество. Вероятно, феномен волн-убийц следует рассматривать с синергетической точки зрения, как один из примеров самоорганизации.

Настоящая книга посвящена волнам-убийцам, возникающим в результате нелинейной динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. На русском языке исторически первая и практически единственная монография, посвященная волнам-убийцам — книга известных специалистов в этой области А.А. Куркина и Е.Н. Пелиновского (см. [21]). Однако эта книга практически не поступала в продажу и недоступна для широкого круга читателей. Отметим еще небольшое издание [20], посвященное волнам-убийцам, а также пособие [24].

В отличие от упомянутых изданий наша монография представляет собой замкнутое изложение теории волн-убийц в океане на основе вычислительных экспериментов. При этом в книге практически отсутствует обзорная часть по другим работам. Большинство результатов, представленных в книге, получены автором и его учениками.

Книга предназначена для специалистов в области современной океанологии, математиков в области теории нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, а также физиков. Особый интерес книга представляет для специалистов в области численных методов и математического моделирования.

Автор надеется, что издание книги по теме математической теории волн-убийц привлечет внимание новых ученых к этой богатой и пока еще не исследованной области науки.

Введение

Волны-убийцы представляют собой внезапные волны в океане большой амплитуды. Эти волны являются причиной регулярной гибели морских судов, а 15 февраля 1982 года волна-убийца погубила нефтяную полупогруженную платформу «Ocean Ranger» в Атлантическом океане вблизи острова Ньюфаундленд. Известны многочисленные случаи, когда волны-убийцы являлись причиной катастроф на берегу океанов и морей.

Разумеется, что волны-убийцы были всегда, пока существует океан, но их научное изучение началось сравнительно недавно. Дело в том, что в данном случае мы имеем дело с весьма необычным феноменом. Сложно поверить, что в спокойном море может возникнуть одиночная волна с амплитудой в 15–20 метров. Как и все экстремальные явления, волны-убийцы представляют собой кратковременное явление, поэтому сфотографировать такую волну удастся очень редко. Хотя моряки рассказывали не только о морских чудовищах, но и «стене воды», «дырке в море» и о «трех сестрах», но людям моря свойственно преувеличивать, поэтому эти свидетельства не становились предметом серьезного изучения.

Бум в изучении волн-убийц произошел в 1995 году, когда 1 января на нефтяной платформе «Dгаурпег» была зафиксирована волна-убийца с высотой более 25 метров. После этого началось систематическое изучение явления волн-убийц. Как это часто бывает, волны-убийцы оказались на стыке нескольких областей науки. Возникнув в океанологии, волны-убийцы стали объектом пристального изучения в теоретической физике. Аналоги экстремально больших волн были найдены и в других нелинейных системах, а не только на воде. С математической точки зрения волны-убийцы представляют собой интересное и очень перспективное поле деятельности. При этом необходимо использовать самые различные математические дисциплины.

Во-первых, это теория дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных. Гидродинамика идеальной жидкости со свободной поверхностью описывается сложными системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для исследования этих уравнений применяются различные модели, которые приводят ко многим более частным уравнениям. Заметим, что одной из перспективных таких моделей являются динамические модели на основе дифференциальных включений.

Во-вторых, для математического описания необходимо применять методы теории случайных процессов, теории вероятности и математической статистики. Сейчас более-менее очевидно, что волны-убийцы могут быть рассмотрены как случайное явление в нелинейной динамике поверхностных волн. Кроме того, для задач практики именно статистика волн-убийц представляет главный интерес.

В-третьих, при изучении экстремальных волн-убийц невозможно обойтись без вычислительных экспериментов. Поскольку для этого необходимо проводить численные расчеты на большом временном интервале с огромной точностью, то необходимо развивать специальные численные методы для решения динамических уравнений, описывающих поверхностные волны на воде.

В-четвертых, следует отметить роль интеллектуальных методов для анализа волн-убийц и применения к проблеме прогноза опасных волн. Здесь могут быть использованы методы теории распознавания образов, нечеткой математики, а также методы искусственного интеллекта.

Настоящая книга посвящена математическим вопросам волн-убийц. В основном представлены результаты, полученные автором и его учениками. При этом мы рассматриваем волны-убийцы исключительно как решения уравнений, описывающих волны на воде, обладающие признаками волн-убийц. В книге не рассматриваются аналитические работы по изучению нелинейных уравнений, являющихся приближенными моделями к описанию волн на воде. Зато в настоящей книге большинство результатов относительно волн-убийц, представленных в работе, продемонстрированы вычислительными экспериментами.

Уровень математической сложности неоднороден в различных частях книги, поскольку в главах, посвященных вопросам существования решений и обоснования численных методов, используются весьма абстрактные результаты теории дифференциальных уравнений в частных производных и функционального анализа. С другой стороны, в более прикладных разделах удается обойтись достаточно элементарным аппаратом.

При написании этой книге автору помогали многие люди, которым автор выражает свою благодарность. Во-первых, хочу поблагодарить своего учителя в этой науке — академика В.Е. Захарова, который показал мне эту интересную область науки и постоянно поддерживал наши исследования, а также патриарха науки о волнах-убийцах — профессора Е.Н. Пелиновского. Особенно хочется поблагодарить своих учеников — А.В. Юдина, А.И. Захаркину (Смирнову), К.И. Кузнецова за совместную работу, многие результаты монографии получены в совместных работах. Я также благодарен многим своим коллегам, чье участие в том или ином виде присутствует в настоящей книге. Особенно отмечу: С.И. Бадулина, Е.М. Варфоломеева, А.А. Василевского, Н.Л. Галеркину, В.В. Геогджаева, П.Л. Гуревича, А.И. Дьченко, Н.Г. Кожелупову, П.Д. Ковалева, А.В. Копавину, Е.В. Кочергина, И.Г. Минервина, Р.И. Нигматулина, Г.М. Резника, Л.Е. Россовского, А.Л. Скубачевского, М.А. Соколовского, М.Ф. Сухина, Д.Е. Тихонова, Ю.И. Троицкую, Б.Н. Филюшкина, Л.Б. Чубарова, Н.Ш. Шамину, В.И. Шриру.

Не в последнюю очередь автор благодарен коллегам в Институте прикладных технико-экономических исследований и экспертиз Российского университета дружбы народов и лично — директору института профессору А.А. Чурсину, заместителям директора А.А. Островской, Т.В. Кокуйцевой, А.Ф. Орловой.

Настоящее исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект N 15-35-20550_мол_а_вед.)

Часть I

**Вычислительные
эксперименты**

Глава I

Волны-убийцы в океане: натурные данные и численные расчеты

1. Описания волн-убийц

1.1. Исторические замечания

Океан занимает большую часть нашей Земли и в планетарном масштабе, несомненно, является хозяином жизни на Земле. От его прихоти зависят не только наши климатические условия, но размер поверхности суши. Повышение уровня Мирового океана даже на сантиметры приводит к существенному для некоторых стран сокращению площади. При этом энергия океана поистине колоссальна. Человечество научилось прорубать туннели через горы, почти поворачивать реки, но в океане даже авианосец выглядит скорлупкой. Более того, жители в океане по массе органики значительно превышают сухопутных и воздушных обитателей.

Но океан играет еще одну важнейшую функцию для человечества. Речь идет о транспортных возможностях, которые предоставляют нам морские просторы. Если бы вместо Атлантического океана была бы пустыня, то Колумб не скоро смог бы ее преодолеть. Дело в том, что сопротивление корабля при движении по воде значительно меньше, чем трение при езде по суши, особенно пересеченной или песчаной местности. Тем более что корабли могут иметь огромную массу и раз-

меры, и им не нужны дороги. Однако во все времена профессия моряка считалась одной из самых отважных и интересных. Классические морские романы рассказывали об опасных штормах, коварных пиратах и необитаемых островах. Иногда моряки любили рассказывать о морских чудовищах, огромных волнах, дырках в море и прочей нечисти. Конечно, образованный человек не будет верить этим рассказам, тем более, что в море – все волны кажутся больше. Лет 30 назад все знали про Бермудский треугольник, с которым связывалось внезапное исчезновение судов. Казалось, что в наш-то век не бывает пиратов, а большие металлические корабли спокойно пройдут сквозь шторма, к тому же шторм возникает не мгновенно и имеет ограниченную площадь, поэтому капитан часто может шторм обойти стороной.

И все же и в наш век корабли внезапно пропадают! И моряки продолжают говорить о девятом вале – внезапной волной огромного размера. И вот в первый день 1995 года произошло важное событие на нефтяной платформе в Северном море. На этой платформе опытные океанологи проводили измерение высоты волнения точными датчиками. Вдруг все увидели одиночную волну, которая была в несколько раз выше окружающих волн и достигла более 15 метров. К счастью для науки эту волну увидели не только люди, которые склонны к преувеличению, но и точные приборы. Поскольку в это время на платформе были квалифицированные специалисты, то вариант сбоя прибора был исключен. Этот случай был описан в научной публикации, а наблюдаемая волна стала называться – «Новогодняя волна». И как это часто бывает после этого инцидента схожие волны стали обнаруживать в самых различных частях океана. Главное, что после этого ученые стали верить в подобные рассказы – из морского фольклора гигантские волны стали предметом научного исследования.

В западной литературе эти волны получили игривые названия – “freak waves, rogue waves”. В русскоязычной литературе с легкой руки ведущего в России специалиста по аномальным волнам проф. Е.Н. Пелиновского такие волны именуются, как волны-убийцы. Впрочем, это название не далеко от правды – встречи с волнами-убийцами нередко приводят к гибели (часто мгновенно!) судов.

1.2. Обзор методов исследования волн-убийц

Отметим, что черты волн-убийц почти полностью противоположны чертам волн цунами, которые на берегу тоже могут достигать десятков метров высоты (и даже известен случай 524 метра!). Волны цунами, однако, возникают вследствие внешних причин, в открытом море

имеют амплитуду 0,1-1 метр (но большую длину) и «живут» десятки часов. Существующие системы обнаружения и предупреждения цунами часто позволяют избежать жертв, во всяком случае, предсказание волн-цунами солидная наука, имеющая эффективные средства.

Волны-убийцы же стали исследоваться не так давно, поэтому про такие волны наши знания далеки от удовлетворительного состояния. Есть несколько фундаментальных проблем в теории волн-убийц. Во-первых, у нас пока нет единого определения волны-убийцы и нет единого мнения, что относить к такой волне. Во-вторых, нет единой теории о механизмах возникновения аномально больших поверхностных волн. Волны-убийцы зарегистрированы во всех океанах, во время штормов и в штиль, в открытом океане и вблизи берега, при наличии течений и при их отсутствии и т.д. В-третьих, практически нет методов предсказания возникновения волн-убийц. Но сложная научная задача – это всегда интересная задача, поэтому сейчас волны-убийцы изучают и океанологи, и физики, и математики, и даже экологи.

Как же исследуют эти волны? Естественная наука имеет три основных метода исследования природных явлений: натурные изменения, лабораторные эксперименты и математическое моделирование. Все эти три метода применяются в настоящее время. Однако волна-убийца возникает внезапно, поэтому не так-то просто ее «поймать» в океане, а лабораторные эксперименты требуют больших бассейнов для моделирования волнения, приводящего к волнам убийцам. Но для исследования волн-убийц нам нужно еще научиться численно решать эти уравнения. Математические проблемы гидродинамики, особенно со свободной поверхностью, относятся к наиболее трудным математическим проблемам, где многие задачи еще не решены. Но все-таки для использования математического моделирования необходим лишь разум и вычислительные мощности, что значительно более доступно, чем проведение натурных экспериментов.

Значительные успехи в численном моделировании морского волнения, достигнутые в последнее время, благодаря так называемым уравнениям в конформных переменных позволяют детально изучить возникновение волн-убийц. При этом таинственные причины ее возникновения так и остаются таинственными. На экране компьютера мы можем наблюдать эти волны, но они возникают также неожиданно и без видимых причин. На рисунке можно видеть это явление «в чистом виде»

Однако то, что волна рождается у нас на глазах, дает возможность «измерить алгеброй гармонию». Мы можем измерить все параметры волн, из которых возникает одиночная волна-убийца. При этом резуль-

таты измерений показали, что одиночная волна на пике возникновения волны-убийцы может концентрировать в себе на порядок большую энергию, чем окрестные волны! Измерения убедительно показали, что волна-убийца представляет собой значительную концентрацию энергии, импульса, крутизны, кривизны и, конечно, амплитуды. Разумеется, в нашем мире множество примеров, когда физические явления сопровождаются концентрацией тех или иных физических величин – энергия лазера, сконцентрированная в тончайшем луче, фокусировка линзой солнечных лучей, разряды молнии и т.д. Но все-таки концентрация энергии при образовании волны-убийцы выглядит более затайливо, поскольку в моменты времени до начала формирования волны-убийцы ничто не предвещает о ее возникновении. Более того, с начала формирования аномальная волна не всегда может вырасти до настоящей волны-убийцы и в любой момент «рассосаться», как будто ничего и не было. Именно поэтому проблема предсказания таких волн еще очень далека от своего решения. В настоящий момент удастся лишь посчитать статистику возникновения волн-убийц в зависимости от параметров начальных волн.

Отметим еще одну интересную аналогию. Как известно, в идеальной ситуации конкуренция между одинаковыми предприятиями часто приводит к тому, что одно или несколько предприятий начинают заметно доминировать на рынке. Таким образом, можно рассматривать волну-убийцу, как олигарха амплитуды среди цуга волн. К слову сказать, существует понятие финансовых волн-убийц, которые выражают экономические кризисы.

1.3. Об опасности волн-убийц

Насколько же опасны волны-убийцы? Ежегодно тысячи людей выходят в открытое море и с ними ничего страшного не происходит. И хотя вычислительные эксперименты показывают, что аномальные волны скорее правило, чем исключение, но в море такие волны большая редкость. Это можно объяснить тем, что волну-убийцу хорошо видно на экране компьютера, но увидеть ее глазами с судна можно не всегда. Не всегда и встреча с такой волной приводит к катастрофическому воздействию на судно. Но человечество привыкло реагировать на опасности мерами безопасности. В данном случае вычисления волн-убийц могут быть не столь безобидными. На повестке дня стоит изменение технических регламентов в судостроении и создания морских платформ. Даже небольшое изменение этих норм приведет к многомиллионному увеличению расходов, на что обычно болезненно реагирует

промышленность. А вот страховые компании, наоборот, готовы приветствовать привлечение внимания к опасностям волн-убийц.

Как известно, единого определения волн-убийцы, охватывающего все аспекты этого явления нет. Это связано как с многогранностью волн-убийц, так и с тем, что волнами-убийцами часто называют совершенно разные явления. Мы будем рассматривать волны-убийцы как поверхностные волны в океане, которые обладают следующими основными признаками:

1. одиночная волна или небольшая группа волн, состоящая из двух-трех волн, амплитуда которых превосходит амплитуду остальных волн в данной районе;
2. волна имеет большую крутизну;
3. волна возникает внезапно;
4. волна обладает достаточно большой энергией и импульсом.

Конечно, эти признаки не являются строгим определением. В последующих главах, где мы будем изучать эти волны с помощью вычислительных экспериментов, мы будем использовать формальные определения волн-убийц, которые однако будут согласовываться с приведенными выше признаками.

2. Различные подходы к теоретическому изучению волн-убийц

Для исследования волн-убийц применялись различные подходы. Рассмотрим основные из них.

Во-первых, экстремальные волны рассматривались на основе линейной теории. К таким методам можно отнести подходы, основанные на интегральном представлении Маслова: С.Ю. Доброхотов (1983) [10], M.G. Brown (2000) [65]. На основе линейного приближения развивались методы, основанные на геометрической фокусировки: M.G. Brown, A. Jensen (2001) [64], T.B. Johannessen, C. Swan (2001) [75] и др.

В рамках линейной теории рассматривались волны аномальной амплитуды, возникающие при взаимодействии с течениями: D.H. Peregrine (1976) [85], B.S. White, B. Fornberg (1998) [91] и др.

Во-вторых, волны-убийцы рассматриваются как нелинейные эффекты. В рамках нелинейной динамики волны-убийцы рассматривались как результат модуляционной неустойчивости и дисперсионного сжатия: Е.Н. Пелиновский, К. Хариф (2000) [34], K.B. Dysthe, K.

Trulsen (1999) [71], K.L. Henderson, D.H. Peregrine, J.W. Dold (1999) [74], V.E. Zakharov, A.I. Dyachenko, A.O. Prokofiev (2006) [96] и др.

Также в рамках нелинейной теории рассматривались приближения на мелкой воде: E. Pelinovsky, T. Talipova, S. Khafif (2000) [86] и др. Для изучения волн-убийц также применялись методы, основанные на уравнении Захарова и кинетических уравнений: S.I. Badulin, V.I. Shriga, S. Khafif, M. Iualalen (1995) [62], A.O. Korotkevich, A.N. Pushkarev, D. Resio, V.E. Zakharov (2008) [78] и др.

В последнее время увеличивается число работ, в которых волны-убийцы исследуются на основе полных нелинейных уравнений гидродинамики: K.L. Henderson, D.H. Peregrine, J.W. Dold (1999) [74], W.J.D. Bateman, C. Swan, P.H. Taylor (2001) [63], D. Chalikov, D. Sheinin (2005) [67], D. Chalikov (2009) [66], В.П. Рубан (2010) [87], A.I. Dyachenko, V.E. Zakharov (2008) [70] и др.

Моделирование волн-убийц на основе полных нелинейных уравнений позволяет наблюдать динамику эти волны в вычислительных экспериментах с большой точностью. Именно такой подход к изучению аномально больших волн рассматривается в настоящей книге. Основной целью нашего исследования является получение оценок вероятности возникновения волн-убийц в зависимости от параметров начальных данных. Для этой цели мы проводим масштабные вычислительные эксперименты по моделированию волн на воде. При таком подходе становится принципиальным вопрос о строгом обосновании математической модели. Для этого мы систематически изучаем нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, что позволяет проводить вычислительные эксперименты на основе полностью обоснованной математической модели. Более того, некоторые наши численные опыты можно трактовать как доказательные вычисления.

3. О натуральных наблюдениях волн-убийц

3.1. Ветровое волнение и экстремальные поверхностные волны

В настоящее время существуют фотографии и инструментальные записи фактов возникновения поверхностных волн аномально большой амплитуды — волн-убийц. Однако наше представление об этих волнах базируется в основном на отдельных случаях [8,9,22]. В то же время, по данным С.К. Гулева и В.Г. Григорьевой (2004) [72], существует значительная межгодовая изменчивость ветрового волнения. В частности, в

некоторых районах Мирового океана обнаруживается рост интенсивности штормовых волн. В связи с этим вопрос о связи вероятности таких аномальных событий, как волны-убийцы, с характеристиками поля ветрового волнения приобретает большое значение.

Изучение поверхностных ветровых волн сопряжено с известными трудностями, связанными со сложностью и большой разнообразностью физических явлений на поверхности океана. Изучению ветровых волн посвящено большое количество фундаментальных работ таких авторов, как И.Н. Давидан, В.Е. Захаров, С.А. Китайгородский, В.П. Краицкий, И.В. Лавренов, М.С. Лонге-Хиггинс, А.С. Мовин, О.М. Филлипс, К. Хассельман и др. Современные теории ветрового волнения, основанные на статистических подходах, позволяют получить закономерности развития волнения в среднем. Важную роль при этом играют и эмпирические зависимости роста волнения (Г.С. Голицын (2010) [6]), связь которых с современными теоретическими представлениями удалось установить совсем недавно (С.И. Бадулин, А.В. Бабанин, Д. Ресио, В.Е. Захаров (2007) [61]). Однако при статистическом описании волнения не учитывается информация о конкретной форме поверхности, а волны-убийцы представляют собой индивидуальное событие с нехарактерным профилем волны. Поэтому аномально большие волны (волны-убийцы), очевидно, не могут быть описаны в рамках статистического подхода. Необходимо обращение к нелинейным уравнениям, описывающим динамику поверхностных волн.

Для решения принципиальной проблемы прогноза волн-убийц необходимо иметь строгое обоснование нелинейных математических моделей, описывающих поверхностные волны на больших временных интервалах вплоть до обрушения, и эффективные численные методы расчета динамики волн на воде. Важнейшую роль здесь играет целостная математическая теория на основе нелинейных уравнений, позволяющая вычислять вероятности возникновения волн-убийц в зависимости от параметров начального волнения и вопросы устойчивости волн-убийц относительно внешних воздействий. В рамках этой теории нами были разработаны эффективные численные методы для расчета поверхностных волн в океане и дано доказательство сходимости этих методов, а также получены важные для практического применения результаты о регуляризации вычислительных процедур в условиях машинной точности. Полученные математические результаты применялись для организации масштабных вычислительных экспериментов по моделированию поверхностных волн с целью получения большого массива расчетных данных необходимых для изучения волн-убийц.

3.2. Некоторые известные случаи встреч с волнами-убийцами

Косвенные упоминания об огромных волнах можно найти в весьма старых источниках, в частности, в дневниках Колумба. Первая количественная и квалифицированная оценка гигантских волн, вероятно, принадлежит известному французскому мореплавателю Жюль Себастьян Сезар Дюмон-Дюрвиллю в первой половине XIX века. По его оценкам встреченная им волна имела 25-30 метров, по его описанию эта волна возникала внезапно при относительно не большом волнении.

В 1893 году произошла трагедия с броненосцем «Русалка», который затонул 7 сентября в водах Финляндии. Найти затонувший корабль удалось только в 2003 году. По ряду признаков есть все основания считать, что этот корабль погиб в результате встречи с волной-убийцей [30].

Исчезновение 13 декабря 1978 года огромного сухогруза «Мюнхен» в Северной Атлантике стало причиной долгого судебного разбирательства. Хотя судно исчезло бесследно (найдена была лишь шлюпка) доскональное изучение всех обстоятельств было установлено, что с большой долей вероятности трагедия связана именно с волной-убийцей.

В настоящее время существует большое количество фотографий и видео записей волн-убийц. Отметим, известную фотографию каякера М.М. Соколовского, сделавшего в июне 2006 года снимок уединенной волны более 1 метра на фоне пологой морской поверхности.

В настоящее время накоплено описание большого числа случаев встреч с волнами убийцами. Систематизированные данные об инцидентах с волнами-убийцами можно найти в [83].

3.3. Сравнение натуральных данных и численного моделирования

В последующих главах мы будем систематически изучать волны-убийцы с помощью вычислительных экспериментов. В настоящем параграфе мы проведем сравнение результатов наших численных экспериментов с известными натурными записями.

Одним из наиболее известных случаев инструментальной записи волны-убийцы является регистрация на Норвежской нефтяной платформе 1 января 1995 года в Северном море (56.5° с.ш., 3.2° в.д.) аномальной волны, получившей название Новогодней волны. Приведем на рисунке I.1 из работы [79] график 1.4.(b), на котором изображена волнограмма этой волны. там же содержится подробный график

волнограммы этой волны, который мы приводим на рисунке I.2. На рисунках I.3 и I.4 мы приводим волнограммы (общую и подробную) из одного численного опыта моделирования нелинейной динамики поверхностных волн в океане. Видно, что волнограммы из вычислительных экспериментов хорошо соотносятся с графиками из натуральных экспериментов.

В той же работе есть запись волны-убийцы с буя в Черном море, сделанная 22 ноября 2001 года, которую мы приводим на рисунке I.5, а на рисунке I.6 мы изображаем волнограмму из другого вычислительного эксперимента. Опять мы видим хорошее совпадение результатов вычислительных экспериментов с натурными данными.

Наконец, приведем еще два примера для сравнения результатов вычислительных экспериментов с известными натурными данными. В частности, характерными профилями волн-убийц являются — «дырка в море» и «три сестры». На рисунке I.7 мы приводим натурную запись волны-убийцы в форме «дырка в море», а на рисунке I.8 натурную запись волны-убийцы в форме «три сестры». Соответственно, на рисунках I.9–I.10 мы приводим результаты вычислительных экспериментов.

На основании приведенных примеров можно сделать вывод о качественном совпадении известных инструментальных данных наблюдения волн-убийц с результатами наших вычислительных экспериментов.

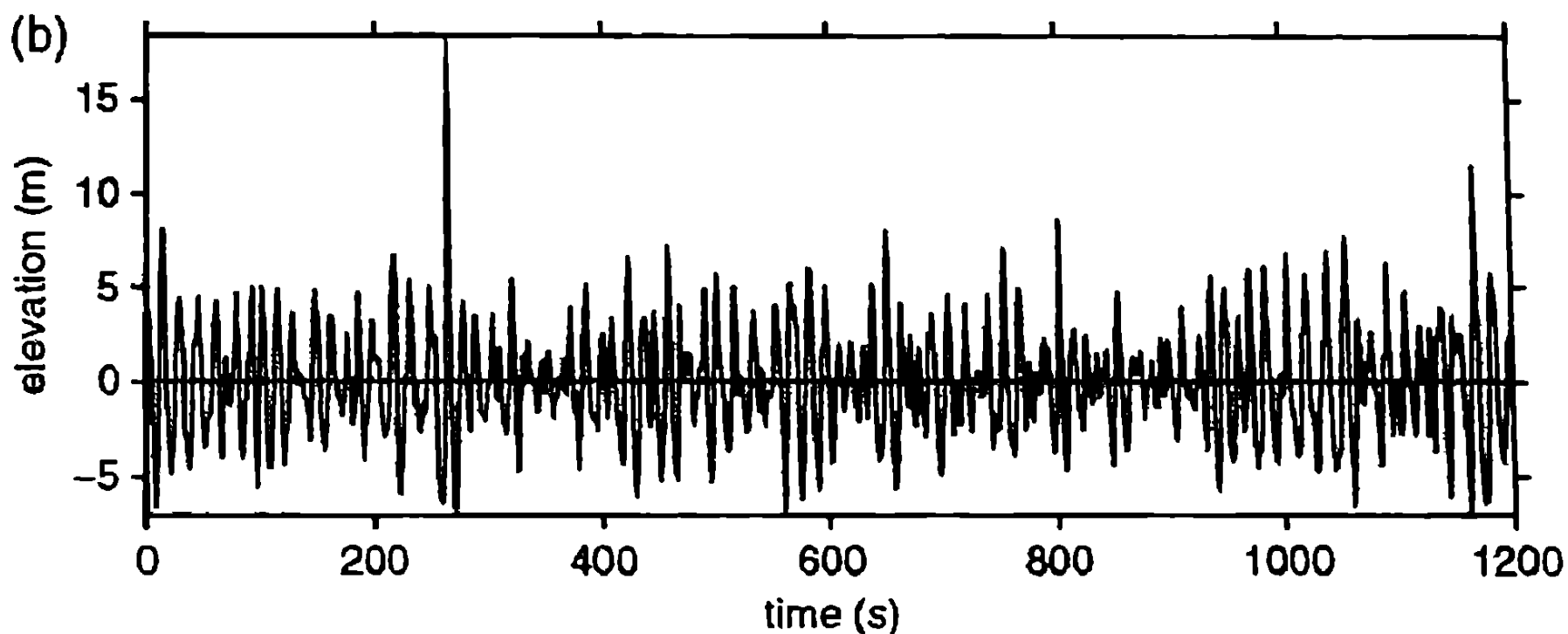


Рис. I.1. Волнограмма Новогодней волны из работы [79]

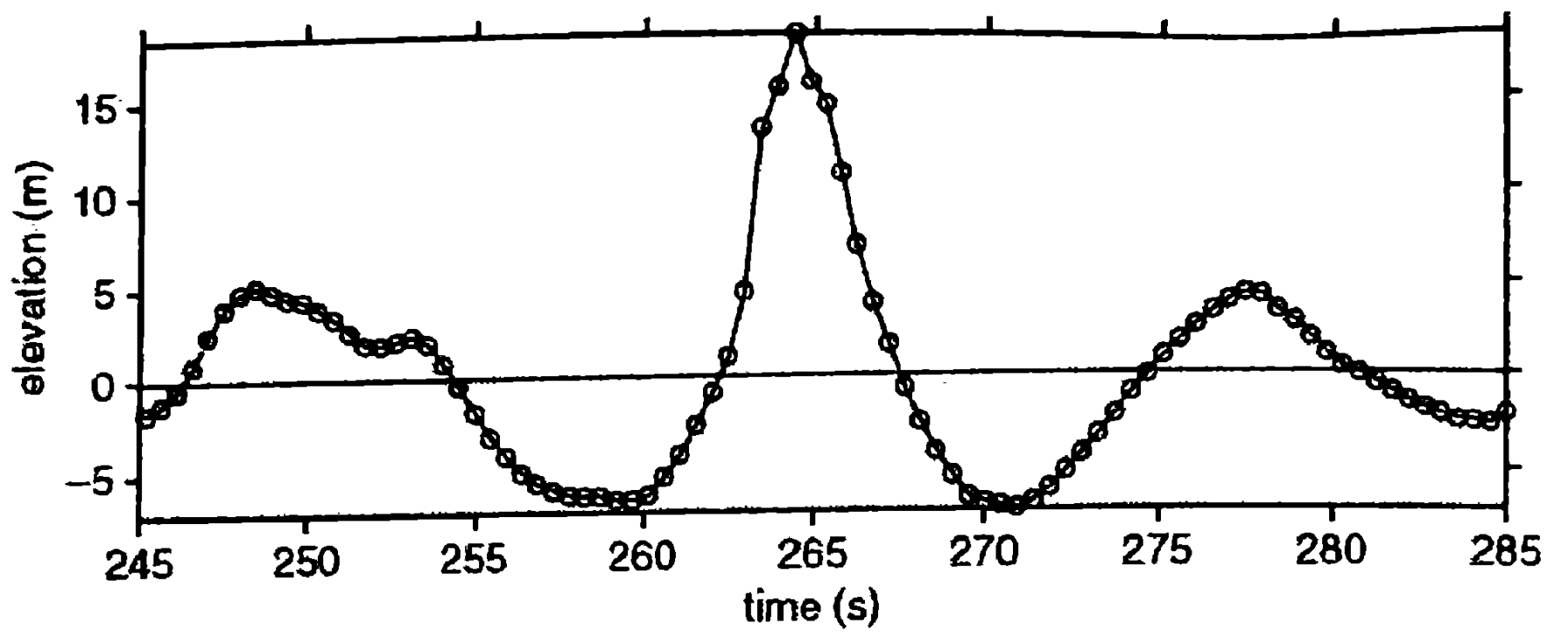


Рис. 1.2. Подробная волнограмма «Новогодней волны» из работы [79]

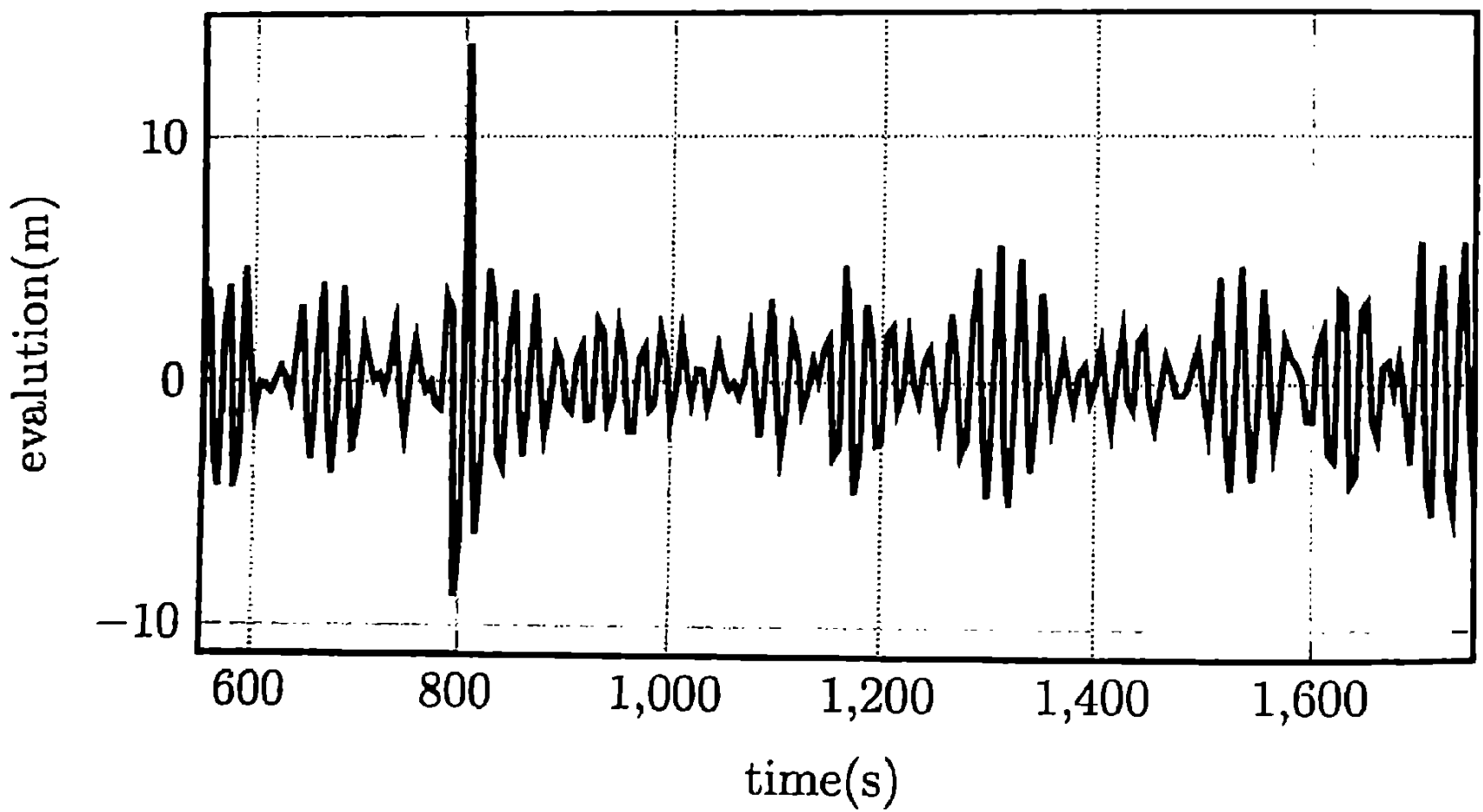


Рис. 1.3. Волнограмма численного эксперимента

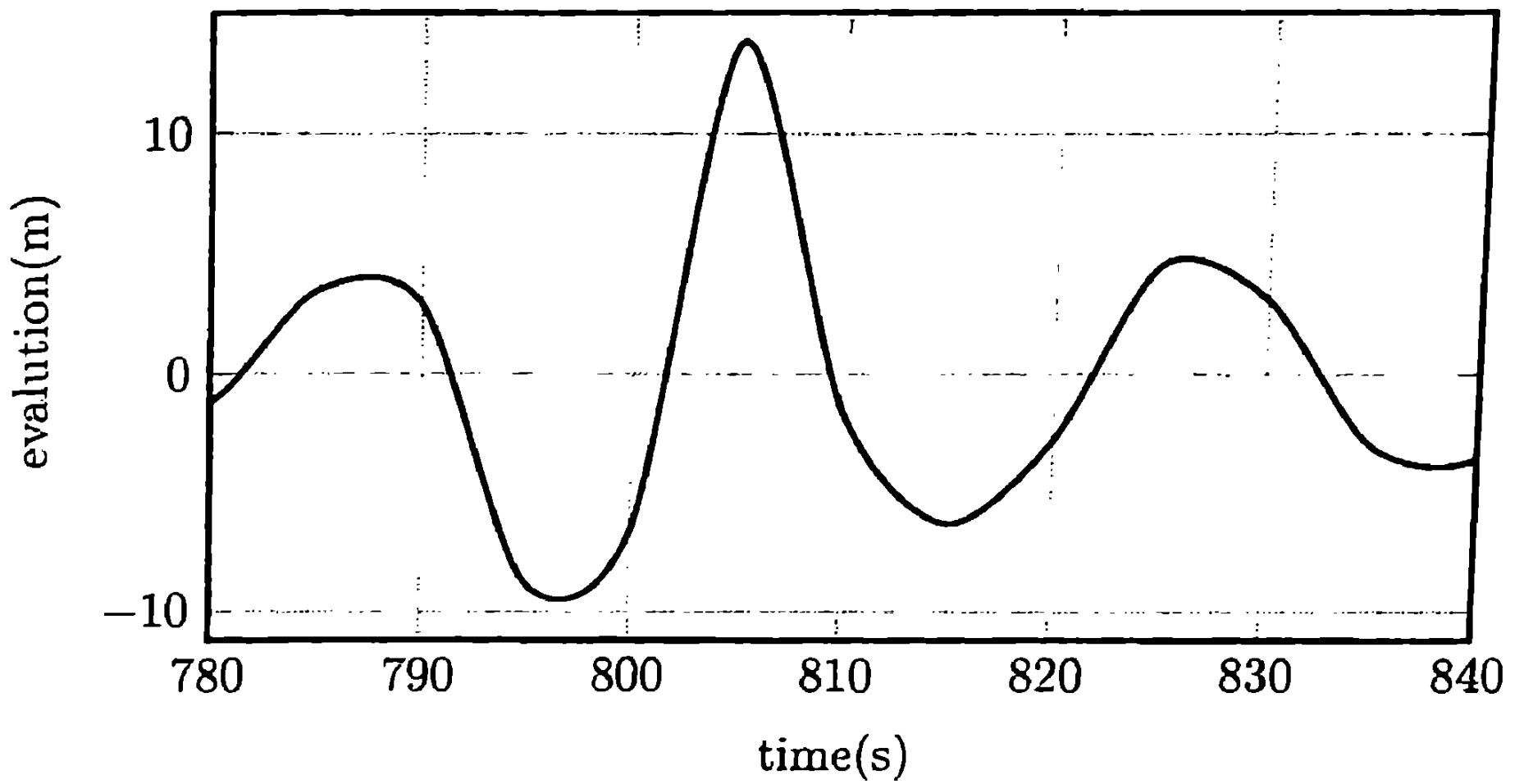


Рис. 1.4. Подробная волнограмма численного эксперимента

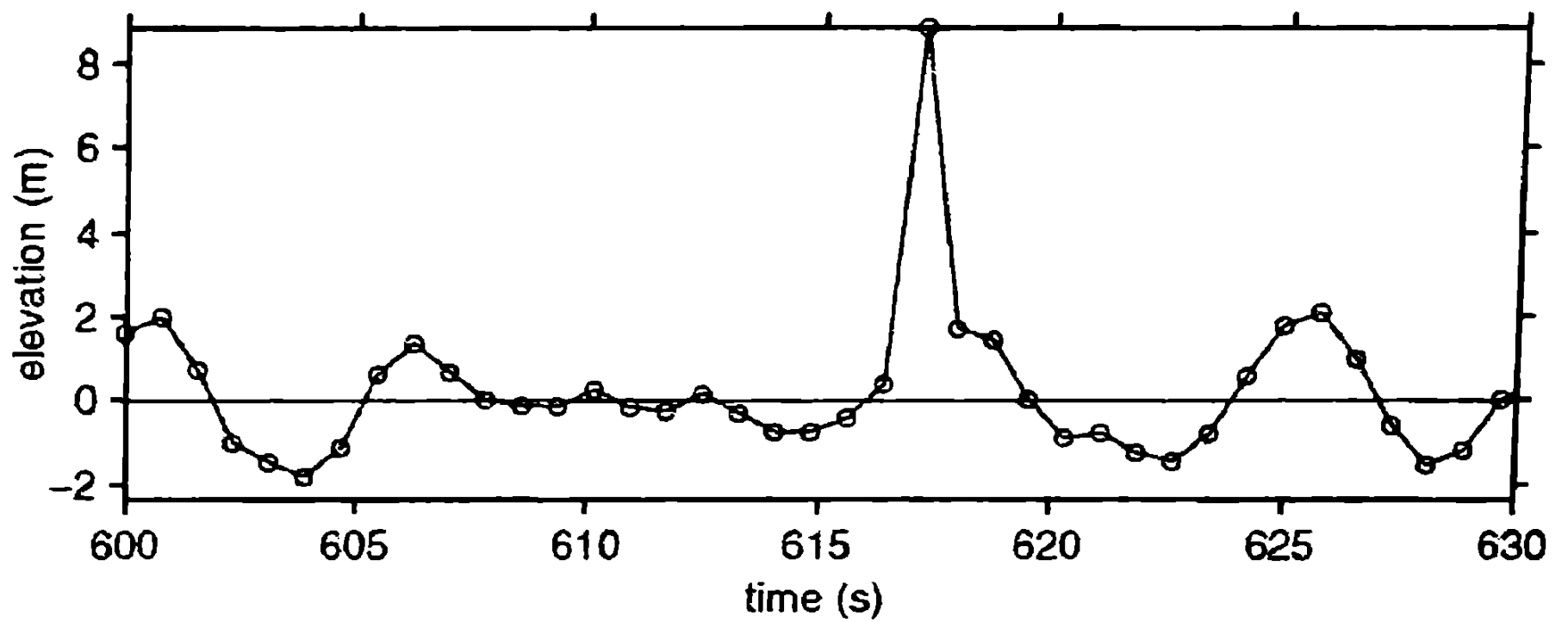


Рис. 1.5. Волнограмма волны-убийцы в Черном море из работы [79]

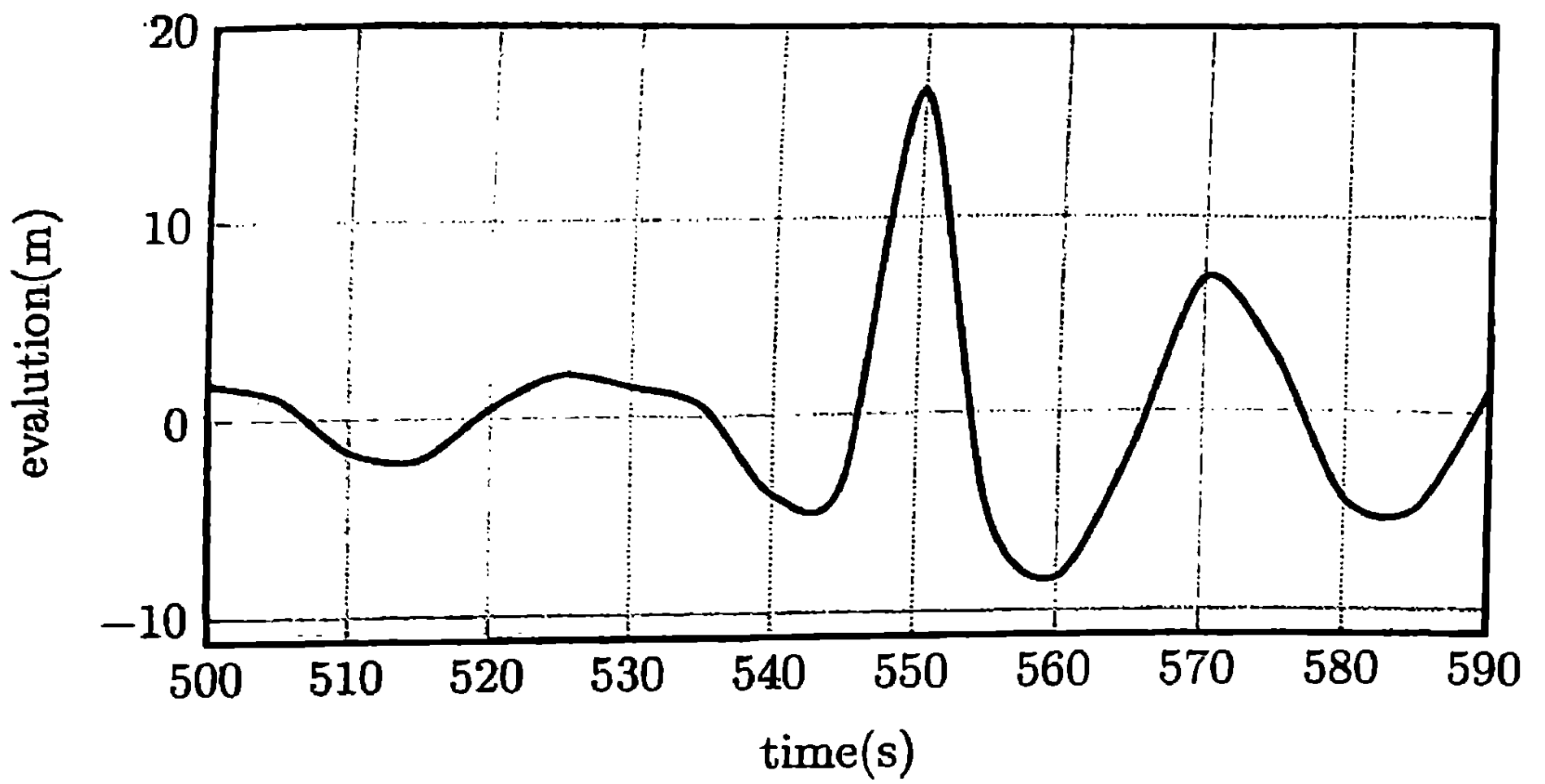


Рис. I.6. Волнограмма численного эксперимента

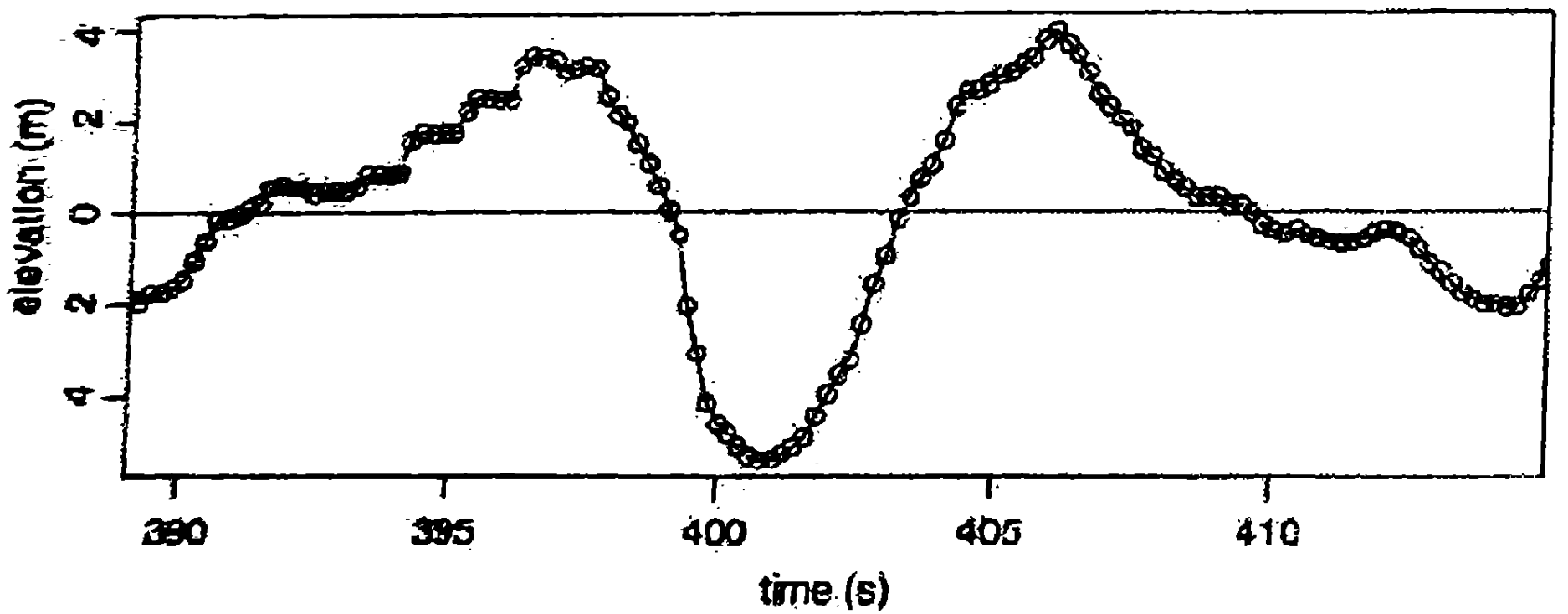


Рис. I.7. Волнограмма «дырки в море» из работы [79]

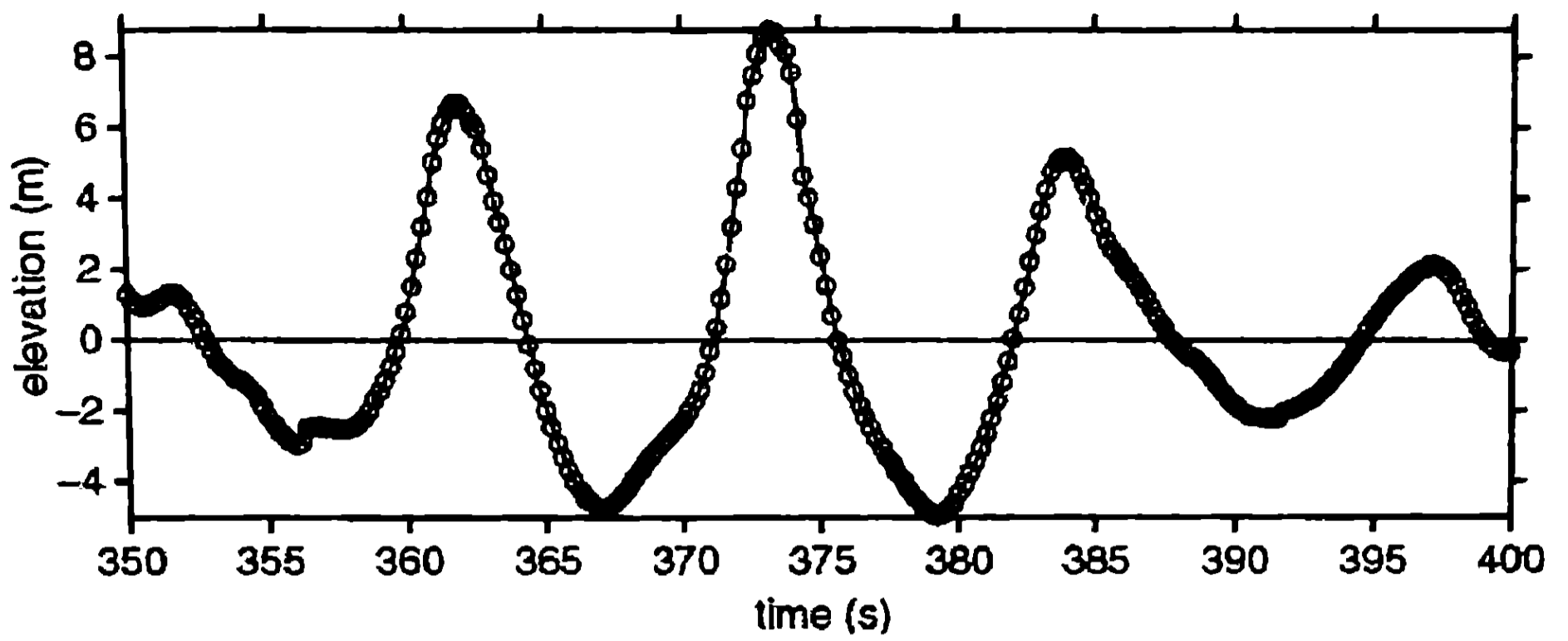


Рис. I.8. Волнограмма «три сестры» из работы [79]

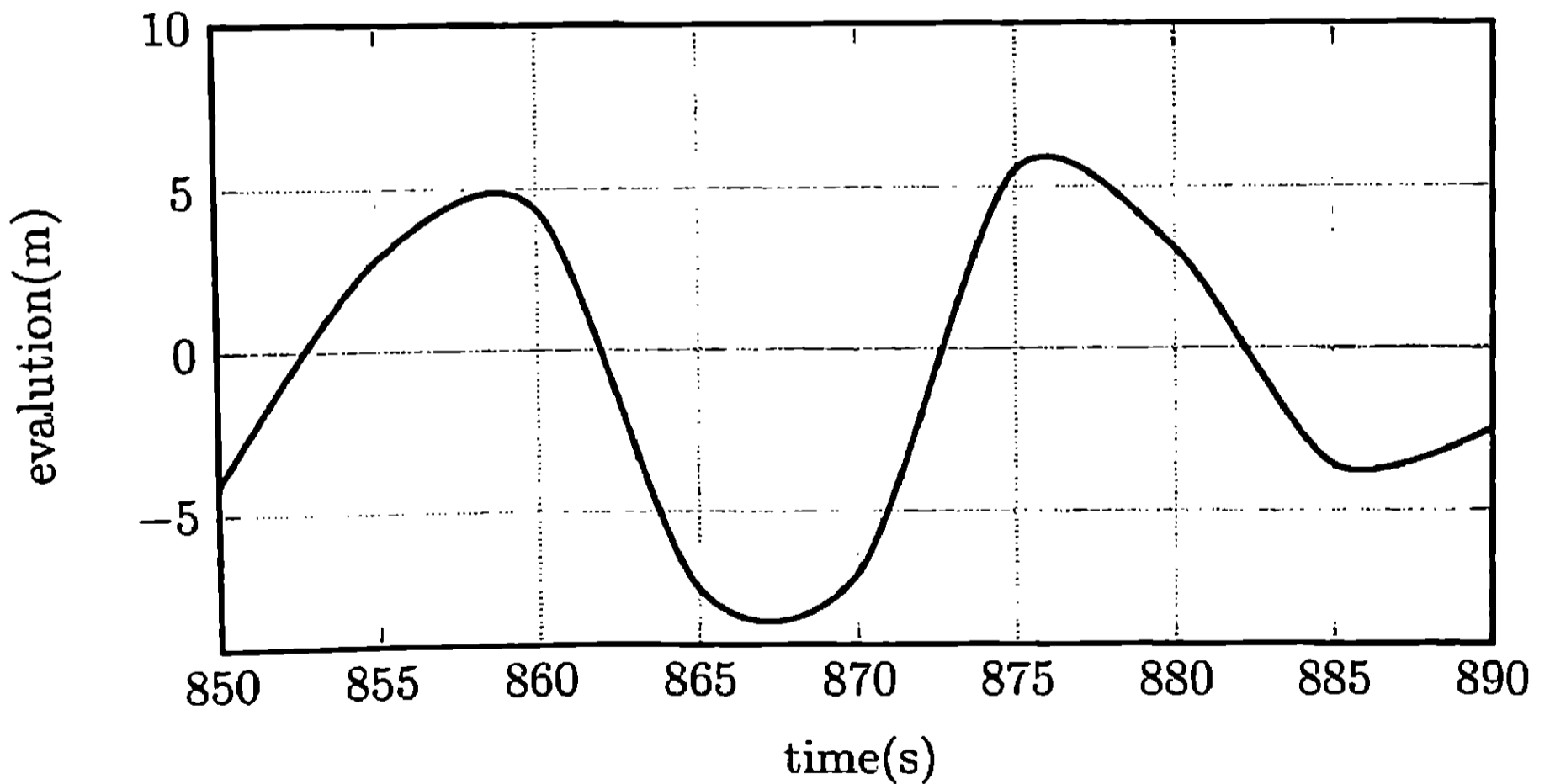


Рис. I.9. Волнограмма «дырки в море» численного эксперимента

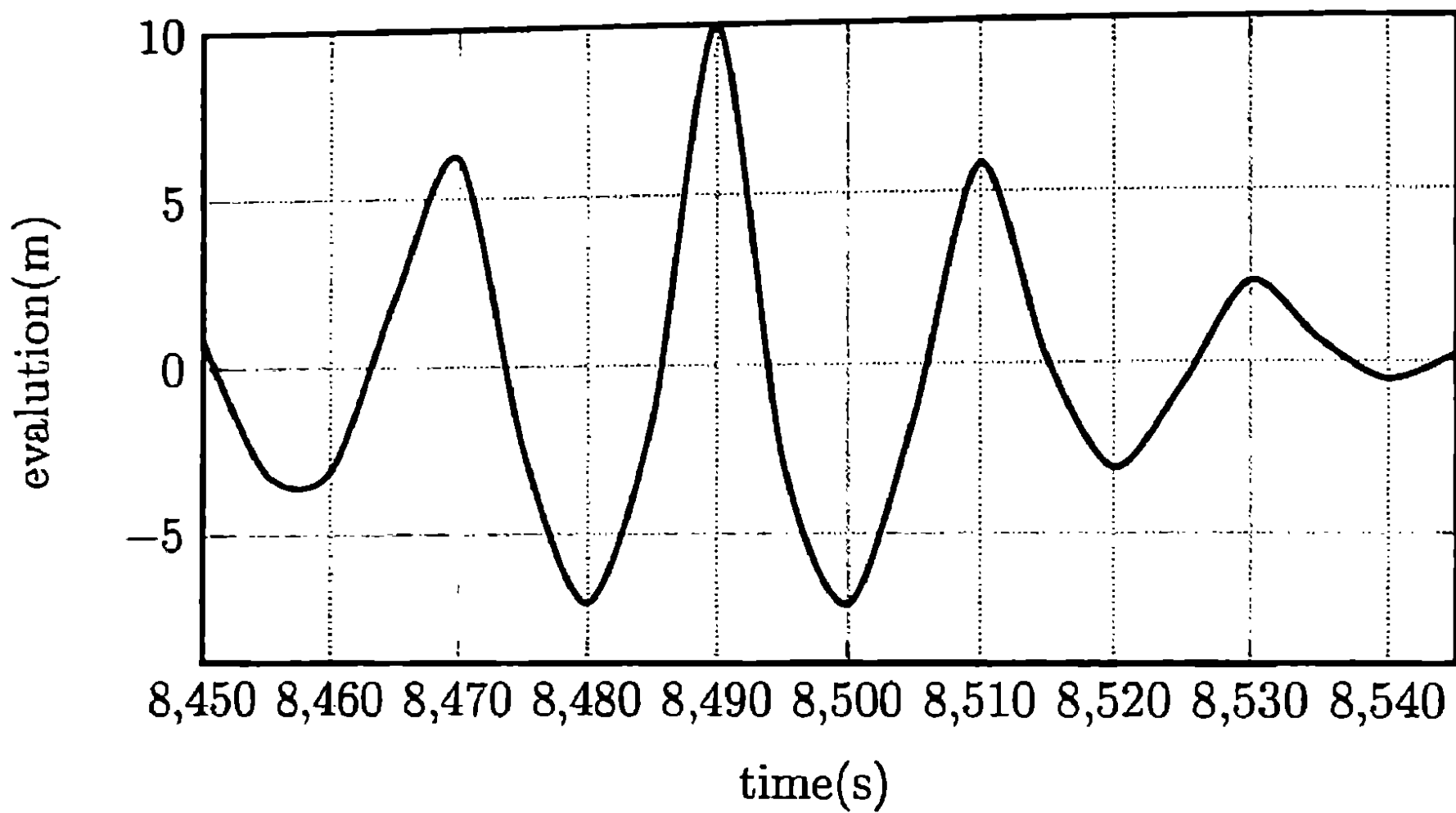


Рис. I.10. Волнограмма «три сестры» численного эксперимента

Глава II

Уравнения гидродинамики для описания волн на воде

Рассмотрим уравнения гидродинамики описывающие поверхностные волны на воде. Мы будем рассматривать плоское потенциальное движение жидкости со свободной поверхностью. В главах VII и VIII мы детально рассмотрим вопросы существования решений и численные методы для решения этих уравнений.

4. Уравнения гидродинамики

4.1. Уравнения Эйлера

Начнем с ряда упрощающих предположений, которые позволят нам построить математическую модель движения жидкости. Во-первых, мы будем считать жидкость сплошной и однородной средой. При этом мы будем описывать состояние жидкости, занимающей объем $Q \subset \mathbb{R}^3$, с помощью поля скоростей:

$$\vec{v}(x) = (v^1(x), v^2(x), v^3(x)),$$

$x = (x_1, x_2, x_3) \in Q$. Переменные $\vec{v}(x)$ называются переменными Эйлера. Поскольку мы рассматриваем нестационарное течение жидкости, поле скоростей будет зависеть от времени: $\vec{v} = \vec{v}(x, t)$. Область, занимаемая жидкостью, также может зависеть от времени (в частности, в задачах со свободной поверхностью): $Q = Q(t)$. Во-вторых, мы будем считать жидкость несжимаемой. В терминах поля скоростей этот

факт выражается формулой

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, t) = v_{x_1}^1 + v_{x_2}^2 + v_{x_3}^3 = 0, \quad x \in Q(t). \quad (\text{II.1})$$

Заметим, что условие (II.1) доставляет значительные трудности при теоретическом изучении уравнений, а также при проведении численных расчетов. В-третьих, мы будем рассматривать жидкости при отсутствии вязкости. Известно, что обычная вода, в частности, морская имеет очень небольшой коэффициент вязкости: $\nu = 1,005 \cdot 10^{-3}$ Па·с, для сравнения глицерин имеет коэффициент вязкости $\nu = 4,22$ Па·с, см. [23]. Исключение из рассмотрения вязкости жидкости (принятие коэффициента вязкости равного нулю) означает не только изменение коэффициента в уравнениях, но и изменение самих уравнений и граничных условий, таким образом, мы будем работать с уравнениями Эйлера, а не Навье-Стокса.

Так как мы будем изучать поверхностные волны, то будем рассматривать тяжелую жидкость, находящуюся с однородным полем силы тяжести. Наша жидкость будет обладать однородной плотностью. В некоторых параграфах, посвященных неустойчивости Релея—Тейлора, мы будем рассматривать движение жидкости в отрицательном поле тяжести.

Перейдем к основным уравнениям, описывающим динамику идеальной несжимаемой жидкости. Для описания течения жидкости мы выбрали эйлеровы координаты. В этих координатах динамика идеальной жидкости описывается системой уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} v_t^1 + v^1 v_{x_1}^1 + v^2 v_{x_2}^1 + v^3 v_{x_3}^1 + p_{x_1} = F^1(x, t), \\ v_t^2 + v^1 v_{x_1}^2 + v^2 v_{x_2}^2 + v^3 v_{x_3}^2 + p_{x_2} = F^2(x, t), \\ v_t^3 + v^1 v_{x_1}^3 + v^2 v_{x_2}^3 + v^3 v_{x_3}^3 + p_{x_3} = F^3(x, t), \\ v_{x_1}^1 + v_{x_2}^2 + v_{x_3}^3 = 0, \end{cases} \quad (x, t) \in Q(t), \quad (\text{II.2})$$

где $\vec{F}(x, t) = (F^1, F^2, F^3)$ есть внешняя сила, действующая на жидкость, скалярная функция $p(x, t)$ называется давлением. Неизвестными в этой системе уравнений является поле скоростей $\vec{v}(x, t)$ и давление $p(x, t)$, а в случае свободной границы и $Q(t)$.

Система уравнений Эйлера (II.2) должна быть дополнена граничными и начальными условиями. Предположим, что объем жидкости

остаётся неизменным во времени и ограничен границей, сквозь которую жидкость не может протекать. Эту границу обозначим Γ . Мы будем считать, что поверхность Γ не имеет самопересечений. За исключением специально оговоренных случаев, мы будем предполагать, что поверхность Γ является кусочно-гладкой, и при почти всех $x \in \Gamma$ определен вектор внешней нормали $\vec{n}(x)$. Условие непротекания через границу означает, что нормальная скорость на границе равна нулю

$$(\vec{n}(x), \vec{v}(x, t))_{\mathbb{R}^3} = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (\text{II.3})$$

Граничные условия на свободной границе существенно отличаются от условий непротекания. Эти условия мы подробно обсудим чуть позже. Заметим, что при рассмотрении задач гидродинамики, возникающих в океанологии, области, занимаемые жидкостью, часто имеют огромные размеры, поэтому при удобно использовать периодические граничные условия.

Несмотря на то, что в систему (II.2) не входит производная по времени от давления, уравнения Эйлера являются эволюционной системой с выделенной переменной t , означающей время. При изучении динамики эволюционных систем необходимо задавать начальные условия

$$\begin{aligned} \vec{v}(x, 0) &= \vec{v}_0(x), \\ p(x, 0) &= p_0(x). \end{aligned} \quad (x \in Q) \quad (\text{II.4})$$

Поскольку давление $p(x, t_0)$ может быть определено по полю скоростей $\vec{v}(x, t_0)$ при фиксированном t_0 , то начальные условия (II.4) должны удовлетворять соответствующим условиям согласования.

Система уравнений Эйлера представляет собой очень сложную математическую задачу как в плане доказательства теорем о существовании и единственности решений этой системы, так и с вычислительной точки зрения. В двумерном случае результаты о разрешимости уравнений Эйлера получены в работах [60, 77]. В трехмерном случае до настоящего момента результатов о глобальной (по времени) разрешимости уравнения Эйлера неизвестно. Существование решений на достаточно малом временном интервале в трехмерном случае рассматривалось в работах [7, 81].

4.2. Уравнения гидродинамики со свободной поверхностью

С этого момента мы будем рассматривать плоское течение идеальной жидкости со свободной границей и бесконечно глубоким дном. Кон-

кретнее, пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y) , ограниченную свободной поверхностью

$$\begin{aligned} -\infty < y < \eta(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Будем считать, что движение жидкости является потенциальным, т.е. существует функция $\Phi(x, y, t)$ такая, что поле скоростей \vec{v} задается по формуле

$$\vec{v}(x, y, t) = \nabla\Phi(x, y, t).$$

Из условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0. \quad (\text{II.5})$$

Уравнение (II.5) является простейшим линейным уравнением в частных производных, однако особая сложность в изучении поверхностных волн заключается в нелинейных граничных условиях. Тем более, что неизвестной (и искомой) функцией является не только потенциал скоростей, но профиль и волны — свободная поверхность, которая задается функцией $\eta(x, t)$.

Будем рассматривать движение жидкости в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения g .

Рассмотрим граничные условия. Во-первых, это так называемое кинематическое условие:

$$(\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} = 0. \quad (\text{II.6})$$

Во-вторых, динамическое условие:

$$\left(\Phi_t + \frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 + gy \right) |_{y=\eta(x,t)} = 0. \quad (\text{II.7})$$

Это условие означает, что давление на свободной поверхности должно быть равно нулю. Напомним, что сейчас мы рассматриваем исключительно гравитационные поверхностные волны, исключая из нашей модели внешнее воздействие. В-третьих, на дне должно быть выполнено условие непротекания, т.е. вертикальная компонента скорости v^2 должна быть равна нулю при $y \rightarrow -\infty$:

$$\Phi_y|_{y=-\infty} = 0. \quad (\text{II.8})$$

По переменной x мы будем рассматривать периодические краевые условия. Поскольку мы рассматриваем нестационарную задачу, необходимо задать начальные условия для Φ и η :

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x, y). \quad (\text{П.9})$$

$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x). \quad (\text{П.10})$$

Задача (П.5)–(П.10) представляет собой замкнутую систему уравнений. В различных функциональных классах эта задача изучалась во многих работах. Рассматривались также обобщения этой задачи на трехмерный случай. Не претендуя на полноту библиографических ссылок, приведем лишь некоторые работы: [25–27, 68, 80, 93, 94]. В приведенных работах доказана корректность задачи (П.5)–(П.10), в частности, было доказано существование решений этой задачи на достаточно малом временном интервале. Натурные и численные эксперименты убедительно показывают, что явление обрушения волн и/или образования особенностей за конечное время возникает для большинства волн. Поэтому принципиально важной является проблема оценки времени существования решений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости.

Система (П.5)–(П.10) является консервативной, т.е. сохраняющей полную механическую энергию. Полная энергия состоит из суммы кинетической T и потенциальной U энергий. Приведем формулы для вычисления энергии:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx \int_{-\infty}^{\eta(x,t)} |\nabla\Phi|^2 dy,$$

$$U = \frac{g}{2} \int_0^{2\pi} \eta^2(x, t) dx.$$

Удобно ввести величину $\Psi(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$, которая является значением потенциала на свободной поверхности (см. [11]). В работе [13] было установлено, что переменные η и Ψ являются канонически сопряженными величинами, т. е.

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\Psi},$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\eta},$$

где гамильтониан H совпадает с полной энергией жидкости $H = T + U$.

В работе [38] система уравнений (II.5)–(II.10), включая граничные условия, получена из вариационных принципов.

4.3. Уравнения гидродинамики со свободной границей в конформных переменных

Задача (II.5)–(II.10) является достаточно сложной для непосредственного изучения. В последнее время все большей популярностью пользуются уравнения в конформных переменных. Использование конформных переменных является классическим методом в задачах описания стационарного потенциального течения идеальной жидкости, однако мы будем использовать конформные переменные для описания нестационарного течения жидкости со свободной поверхностью. Идея использовать конформные переменные для описания нестационарного течения идеальной жидкости со свободной поверхностью впервые была предложена в работах [33] и [92]. Для численного моделирования уравнения в конформных переменных использовались в работах [67], [11], [87] и многих других. Мы рассмотрим вариант этих уравнений, предложенный в работе [95].

Мы рассматриваем 2π -периодические граничные условия по переменной x . Уравнения, рассматриваемые в настоящей главе, могут быть записаны и для случая граничных условий на бесконечности. Заметим, что для рассмотрения мелкомасштабных явлений в океане переход к периодическому случаю является общепринятым.

Сделаем несколько предположений относительно области, занимаемой жидкостью в начальный момент времени ($t = 0$). В предыдущем параграфе мы предполагали, что свободная поверхность идеальной жидкости ограничена однозначной непрерывной функцией $\eta(x, t)$. Если условие непрерывности является физически необходимым, то требование однозначности этой функции возникло из уравнений (II.5)–(II.10). В то же время волновое движение жидкости может иметь свободную поверхность, не имеющую однозначной проекции на ось x . Одним из важных особенностей подхода к теории волн идеальной жидкости с помощью конформных переменных является то, что уравнения в конформных переменных допускают параметрическое задание свободной поверхности. Итак, предположим, что наша жидкость ограничена свободной поверхностью, заданной геометрическим местом точек:

$$\{(x(u, t), y(u, t)) : u \in [0, 2\pi], t > 0\},$$

где $x(u, t)$, $y(u, t)$ суть непрерывные функции. Мы считаем, что свободная поверхность является 2π -периодичной вдоль оси x . В связи с этим считаем, что

$$\begin{aligned}x(0, t) &= 0, \\x(2\pi, t) &= 2\pi, \\y(0, t) &= y(2\pi, t).\end{aligned}$$

Помимо непрерывности функций x , y мы будем предполагать, что свободная поверхность не имеет точек самопересечений. В дальнейшем мы уточним гладкость функций x , y , а сейчас заметим, что в силу теоремы Римана мы можем совершить конформное отображение области, занимаемой жидкостью в плоскости (x, y) в полуплоскость в переменных (u, v) :

$$\begin{aligned}0 < u < 2\pi, \\-\infty < v < 0.\end{aligned}$$

После преобразования поверхность $\eta(x, t)$ может быть представлена в параметрическом виде:

$$\begin{aligned}y &= y(u, t), \\x &= u + \tilde{x}(u, t),\end{aligned}$$

где $\tilde{x}(u, t)$ и $y(u, t)$ связаны оператором Гильберта

$$\begin{aligned}y &= H[\tilde{x}], \\ \tilde{x} &= -H[y].\end{aligned}\tag{II.11}$$

Оператор Гильберта представляет собой сингулярный интегральный оператор, определенный (для периодических функций) по формуле

$$H[f](u) = \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_0^{2\pi} f(u') \operatorname{ctg} \left(\frac{u' - u}{2} \right) du'.$$

В образах коэффициентов Фурье оператор Гильберта имеет очень простой вид:

$$H \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{iku} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i \operatorname{sign}(k) a_k e^{iku}.$$

Мы в дальнейшем рассмотрим вопрос эффективного способа приближенного вычисления оператора Гильберта на равномерных и неравномерных сетках. Подробнее о свойствах оператора Гильберта см. [36].

Как показано в работе [11], переменные $y(u, t)$ и $\Psi(u, t)$, где $\Psi(u, \cdot)$ является значением потенциала скоростей на свободной поверхности, полностью описывают движение жидкости и подчиняются следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$y_t = y_u \mathbf{H} \left[\frac{\mathbf{H}[\Psi_u]}{J} \right] - x_u \frac{\mathbf{H}[\Psi_u]}{J}, \quad (\text{II.12})$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + (\mathbf{H}[\Psi_u])^2}{2J} + \mathbf{H} \left[\frac{\mathbf{H}[\Psi_u]}{J} \right] \Psi_u + \frac{\mathbf{H}[\Psi_u]}{J} \mathbf{H}[\Psi_u] - gy, \quad (\text{II.13})$$

где $J = x_u^2 + y_u^2$ — якобиан отображения. С уравнениями связываются 2π -периодические граничные условия по переменной u и начальные условия

$$y(u, 0) = y_0(u), \quad (\text{II.14})$$

$$\Psi(u, 0) = \Psi_0(u). \quad (\text{II.15})$$

Заметим, что в силу соотношений (II.11), функция x , для вычисления J , однозначно восстанавливается по функции y . Несмотря на некоторую громоздкость уравнений (II.12)–(II.13), эти уравнения разрешены относительно производных по времени. Следовательно, мы имеем эволюционную задачу, которую можно пытаться численно решать методом Фурье. Однако, как показали вычислительные опыты, применение стандартных численных схем к этим уравнениям натывается на серьезные трудности, связанные с численной неустойчивостью вычислительного процесса. Как мы увидим в дальнейшем, эти трудности во многом связаны главным образом с погрешностями машинных вычислений, и мы рассмотрим способы регуляризации вычислительного процесса в условиях машинной точности.

Сейчас мы рассмотрим уравнения, которые являются следствием уравнений (II.12)–(II.13). При этом новые уравнения будут иметь значительно более простой вид и будут значительно более подходить для теоретического и численного анализа.

Как оказалось (см. [95]), уравнения (II.12)–(II.13) можно переписать в более удобной форме.

Образуем пару комплексных функций

$$z(w, t) = x(w, t) + iy(w, t)$$

и

$$\Pi(u, t) = \Psi(u, t) + iH[\Psi(u, t)],$$

где $w = u + iv$. Введем новые переменные $R(w, t)$ и $V(w, t)$ по следующим формулам:

$$R(w, t) = \frac{1}{z_w}$$

и

$$V(w, t) = i \frac{\Pi_w}{z_w}.$$

Функции R и V аналитичны в нижней полуплоскости и удовлетворяют следующим условиям:

$$R(w, t) \rightarrow 1, \quad |w| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } w \leq 0,$$

$$V(w, t) \rightarrow 0, \quad |w| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } w \leq 0.$$

Как показано в работе [95], функции R и V удовлетворяют следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$R_t = i(U R_w - U_w R), \quad (\text{П.16})$$

$$V_t = i(U V_w - B_w R) + g(R - 1), \quad (\text{П.17})$$

где

$$U = P(V\bar{R} + \bar{V}R),$$

$$B = P(V\bar{V}),$$

$$P = \frac{1}{2} (I + iH).$$

Уравнения (П.16)–(П.17) справедливы в нижней полуплоскости комплексной области, однако нас будут интересовать решения лишь на вещественной оси при $v = 0$. Приведем окончательную постановку задачи:

$$\begin{aligned} R_t(u, t) &= i(U(u, t)R_u(u, t) - U_u(u, t)R(u, t)), \\ V_t(u, t) &= i(U(u, t)V_u(u, t) - B_u(u, t)R(u, t)) + g(R(u, t) - 1), \\ &0 < u < 2\pi, \quad 0 < t < T, \\ R(0, t) &= R(2\pi, t), \quad V(0, t) = V(2\pi, t), \quad 0 < t < T, \\ R(u, 0) &= R_0(u), \quad V(u, 0) = V_0(u), \quad 0 < u < 2\pi. \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Решая систему (II.18), мы получаем функции $R(u, t)$ и $V(u, t)$. Покажем как с помощью этих функций восстановить свободную поверхность и значение потенциала на свободной поверхности. Воспользуемся следующим представлением для функций R, V :

$$R(u, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) e^{-iku},$$

$$V(u, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) e^{-iku}.$$

Тогда для функции $\frac{1}{R}$ имеет место представление

$$\frac{1}{R} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{-iku}.$$

Значения коэффициентов c_k несложно получить рекуррентно из соотношения

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{-iku} \right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) e^{-iku} \right) = 1.$$

Умножением рядов можно получить разложение

$$-i \frac{V(u, t)}{R} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) e^{-iku}.$$

Теперь восстановим функцию $z(u, t)$ следующим образом:

$$z(u, t) = u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} c_k(t) e^{-iku},$$

а функцию $\Pi(u, t)$ — по формуле

$$\Pi(u, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} d_k(t) e^{-iku}.$$

Свободную поверхность мы получим как геометрическое место точек по следующему правилу:

$$\Gamma(t) = \{(\operatorname{Re} z(u, t), \operatorname{Im} z(u, t)) : u \in (0, 2\pi)\}.$$

Значение потенциала на свободной поверхности находится по формуле

$$\Psi(u, t) = \operatorname{Re} \Pi(u, t).$$

Уравнения (II.18) являются очень удобными для теоретического и численного анализа. Заметим, что вид этих уравнений получен в предположении бесконечно глубокой воды. Форму этих уравнений можно распространить на случай конечной глубины, однако получаемые при этом уравнения теряют многие «хорошие качества», в частности устойчивости вычислительного процесса при численном решении этих уравнений.

Заметим также, что функции R и V хотя и полностью описывают динамику жидкости со свободной поверхностью, но законы сохранения (например, энергии) напрямую не могут быть записаны в переменных R, V , хотя через переменные Ψ и z , которые также являются конформными, можно выписать законы сохранения энергии.

4.4. Уравнения гидродинамики с конечным дном

Перейдем к рассмотрению нестационарного течения идеальной жидкости со свободной поверхностью и конечной глубиной.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y) , ограниченную свободной поверхностью

$$\begin{aligned} -\bar{h} < y < \eta(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Считая движение жидкости потенциальным, мы имеем:

$$v(x, y, t) = \nabla \Phi(x, y, t),$$

где $v(x, y, t)$ — двумерное поле скоростей, $\Phi(x, y, t)$ — потенциал. Условие несжимаемости жидкости выражается следующим образом

$$\operatorname{div} v = 0$$

следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi(x, y, t) = 0.$$

С этим уравнением связываются следующие граничные и начальные условия, которые совпадают с соответствующим условием для бесконечно глубокой воды, кроме условия на дне

$$(\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} = 0,$$

$$\left(\Phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gy \right) |_{y=\eta(x,t)} = 0,$$

$$\Phi_y |_{y=-\bar{h}} = 0, \eta|_{t=0} = \eta_0(x),$$

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x, y).$$

Здесь g — ускорение свободного падения.

Также мы вводим величину $\Psi(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$, которая является значением потенциала на свободной поверхности (см. [11]). Аналогично бесконечно глубокой воде переменные η и Ψ являются канонически сопряженными величинами, т. е.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Psi},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \eta},$$

где гамильтониан H совпадает с полной энергией жидкости $H = T + U$,

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\bar{h}}^{\eta(x,t)} |\nabla \Phi|^2 dy,$$

$$U = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(x, t) dx.$$

Следуя работе [11], совершим конформное отображение области, занимаемой жидкостью в плоскости (x, y) в полупространство в переменных (u, v)

$$-\infty < u < \infty,$$

$$-h < v < 0.$$

После преобразования поверхность $\eta(x, t)$ может быть представлена в параметрическом виде

$$y = y(u, t),$$

$$x = u + \bar{x}(u, t).$$

Переменные $\tilde{x}(u, t)$ и $y(u, t)$ связаны соотношением

$$y = R[\tilde{x}],$$

где R — интегральный оператор вида

$$R[f](u) = \frac{1}{2h} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')}{\sinh(\pi/2h(u' - u))} du'.$$

Обратный к R оператор T имеет вид

$$T[f](u) = \frac{1}{h} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')}{1 - e^{-\pi/(h(u-u'))}} du'.$$

Как показано в работе [11], переменные $y(u, t)$ и $\Psi(u, t)$ полностью описывают движение жидкости и подчиняются следующей системе интегродифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных по времени:

$$y_t = -y_u T \left[\frac{R[\Psi_u]}{J} \right] + x_u \frac{R[\Psi_u]}{J}, \quad (\text{II.19})$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 - (R[\Psi_u])^2}{2J} - T \left[\frac{R[\Psi_u]}{J} \right] \Psi_u - gy, \quad (\text{II.20})$$

где $J = x_u^2 + y_u^2$ — якобиан отображения.

Уравнения (II.19)–(II.20) мы будем рассматривать с периодическими граничными условиями. Пусть $u \in (0, 2\pi)$, а функции y, Ψ представлены в виде:

$$y(u, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t) e^{iku},$$

$$\Psi(u, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_k(t) e^{iku}.$$

Операторы R и T в фурье-представлении имеют простой вид:

$$y_k = R_k \tilde{x}_k, \quad R_k = i \operatorname{th} kh,$$

$$\tilde{x}_k = T_k y_k, \quad T_k = -i \operatorname{cth} kh.$$

Операция дифференцирования по переменной u в Фурье представлении имеет обычный вид:

$$D_k = ik.$$

5. Уравнения с учетом внешних воздействий

Уравнения (П.18) описывают динамику идеальной жидкости при отсутствии каких-либо внешних воздействий, кроме гравитационного поля. Однако во многих задачах теоретической физики и океанологии возникает необходимость учитывать внешние воздействия на жидкость. Самый очевидный пример внешних воздействий на поверхностные волны — это ветровое воздействие.

Другая причина внешних воздействий состоит в том, чтобы рассматривать малые внешние флуктуации, которые могут иметь различную физическую природу. С математической точки зрения малые флуктуации можно рассматривать как случайную функцию в правой части, малую в определенном смысле.

Рассмотрим уравнения (П.18) с правой частью.

$$\begin{aligned} R_t(u, t) &= i(U(u, t)R_u(u, t) - U_u(u, t)R(u, t)) + \\ &\quad F_1[R, V, t](u, t), \\ V_t(u, t) &= i(U(u, t)V_u(u, t) - B_u(u, t)R(u, t)) + g(R(u, t) - 1) + \\ &\quad F_2[R, V, t](u, t), \end{aligned} \tag{П.21}$$
$$0 < u < 2\pi, \quad 0 < t < T,$$
$$R(0, t) = R(2\pi, t), \quad V(0, t) = V(2\pi, t), \quad 0 < t < T,$$
$$R(u, 0) = R_0(u), \quad V(u, 0) = V_0(u), \quad 0 < u < 2\pi.$$

где F_1 и F_2 являются функционалами, зависящими от неизвестных функций R и V , а также от временной переменной. Таким образом система (П.21) является системой функционально-дифференциальных уравнений.

Укажем физический смысл функций $F_i(t)$, $i = 1, 2$. Функция R имеет смысл якобиана конформного преобразования области, занимаемой свободной поверхностью в нижнюю комплексную полуплоскость. Следовательно, физический смысл функции F_1 состоит в мгновенных флуктуациях свободной поверхности. Далее, поскольку функция V имеет физический смысл комплексной скорости, то функция $F_2(t)$ имеет физический смысл плотности силы, действующей на свободную поверхность.

6. Стационарные волны

Среди поверхностных волн наиболее исследованными являются стационарные волны. Стационарные волны изучались во многих рабо-

тах, среди которых отметим основополагающие в теории стационарных волн: [28, 29, 82, 90]. Приведем уравнения в конформных переменных, рассмотренных выше, для определения профиля стационарных волн.

Под стационарными или бегущими волнами мы будем понимать такие решения уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости, которые могут быть записаны в форме

$$f(u, t) = F(u - ct),$$

где c — скорость бегущей волны.

Параметрами для симметрических стационарных волн является период, который мы будем считать равным $\frac{2\pi}{k}$, где k — целое число, и постоянная скорость стационарной волны, которую обозначим s .

Профиль стационарной волны будем искать в виде

$$y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nku.$$

Введем обозначение

$$S_n = \frac{1}{kn}.$$

Как показано в работе [11], коэффициенты a_n удовлетворяют следующей системе нелинейных уравнений с параметром λ

$$(\lambda^2 - gS_1)a_1 = \frac{g}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{S_1(S_m + S_{m+1})}{S_m S_{m+1}} \right) a_m a_{m+1}, \quad (\text{II.22})$$

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - gS_n)a_n = & \frac{g}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{S_n(S_m + S_{m+n})}{S_m S_{m+n}} \right) a_m a_{m+n} + \\ & + \frac{g}{4} \sum_{m=1}^{n-1} \left(1 + \frac{S_n(S_m + S_{n-m})}{S_m S_{n-m}} \right) a_m a_{n-m}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Коэффициент a_0 вычисляется по формуле:

$$a_0 = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{S_n}. \quad (\text{II.24})$$

Параметр λ связан со скоростью стационарной волны с следующим образом

$$\lambda^2 = \left(1 - 2 \left\langle 1 - \frac{1}{|z_u|^2} \right\rangle \right) c^2, \quad (\text{II.25})$$

где угловые скобки означают усреднение по периоду.

После решения системы уравнений (II.22)–(II.24) мы находим u и $z = u - N[y] + y$. Зная z и параметр λ , мы можем из соотношения (II.25) найти скорость c .

После того как мы нашли профиль стационарной волны, мы можем найти и значение потенциала на границе из формулы (см. [11])

$$cu_u = N\Psi_u. \quad (\text{II.26})$$

Как известно, решение системы (II.22)–(II.23) существует не для всех значений параметра. Еще в работе Стокса [90] был получен результат о предельной волне. Им было показано, что при увеличении скорости стационарных гравитационных волн происходит заострение гребней и образуется угол, равный 120° .

Уравнения (II.22)–(II.24) представляют собой бесконечную систему нелинейных уравнений. Решения этих уравнений являются коэффициентами Фурье. В случае докритического значения скорости профиль поверхностной волны является аналитической функцией, а коэффициенты ряда Фурье стремятся к нулю с экспоненциальной скоростью.

Глава III

Вычислительные эксперименты по моделированию волн-убийц

В настоящей главе мы опишем постановки основных вычислительных экспериментов, основанные на численном решении уравнений гидродинамики, описывающих поверхностные волны на воде, приведенные в главе II.

Как мы уже отмечали, основу для изучения волн-убийц в нашей книге составляют вычислительные эксперименты. В результате этих вычислительных экспериментов мы получаем статические и качественные характеристики волн-убийц.

7. Постановка вычислительных экспериментов

7.1. Динамические уравнения с накачкой и диссипацией

Поскольку для изучения статистики anomalно больших поверхностных волн нужно проводить численные расчеты на больших временных интервалах, то необходимо использовать диссипацию в численных расчетах, которая будет учитывать возможность обрушения волн в ходе эволюции. С другой стороны, для того, чтобы поддерживать одина-

ковый уровень энергии в течение всего эксперимента, мы используем также и накачку, которая включалась, если уровень энергии падал ниже заданного уровня и выключалась, когда энергия достигала нужного уровня. Таким образом, мы численно решаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{R}(t, u) &= i(U(t, u)R'(t, u) - U'(t, u)R(t, u)) - \alpha R''''', \\ \dot{V}(t, u) &= i(U(t, u)V'(t, u) - V'(t, u)R(t, u)) + g(R(t, u) - 1) - \alpha V'''' + F, \\ F &= F_w \cdot \left| \frac{dy}{dx} \right|, \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

где F_w — положительный коэффициент накачки, который подбирается эмпирически, α — положительный коэффициент диссипации, также выбранный эмпирически. Таким образом, накачка представляет собой поверхностную силу, пропорциональную наклону профиля волн.

7.2. Построение начальных условий

Мы рассматриваем начальное возмущение поверхности как ансамбль бегущих в одну сторону волн со средним значением волнового числа $K = K_0$. Мы задавали начальное возмущение поверхности суммой гармоник со случайными фазами:

$$\eta(x, 0) = \sum_{-\frac{1}{2}K_{max}}^{\frac{1}{2}K_{max}} \phi(k - K_0) \cos(kx - \xi_k).$$

Здесь K_{max} — полное число спектральных мод, ξ_k — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $0 \leq \xi_k < 2\pi$.

Параметры спектра подбирались так, чтобы квадрат средней крутизны

$$\mu^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_x^2 dx$$

и дисперсия

$$D = \left(\int_{-K_w}^{K_w} k^2 e^{-\alpha k^2} dk \right) \left(\int_{-K_w}^{K_w} e^{-\alpha k^2} dk \right)^{-1}$$

принимали заданные значения.

Функция $\phi(k)$ определялась по формуле

$$\phi(k) = \begin{cases} \delta_k, & |k| > K_w; \\ \kappa \exp(-\alpha k^2) + \delta_k, & |k| \leq K_w. \end{cases} \quad (\text{Ш.2})$$

Здесь δ_k — независимые случайные параметры, равномерно распределенные на интервале $-\frac{1}{2}K_{max} < k < \frac{1}{2}K_{max}$. Характерный график функции $\phi(k)$ представлен на рис. Ш.1. Вклад случайного шума в энергию составлял не более трех процентов.

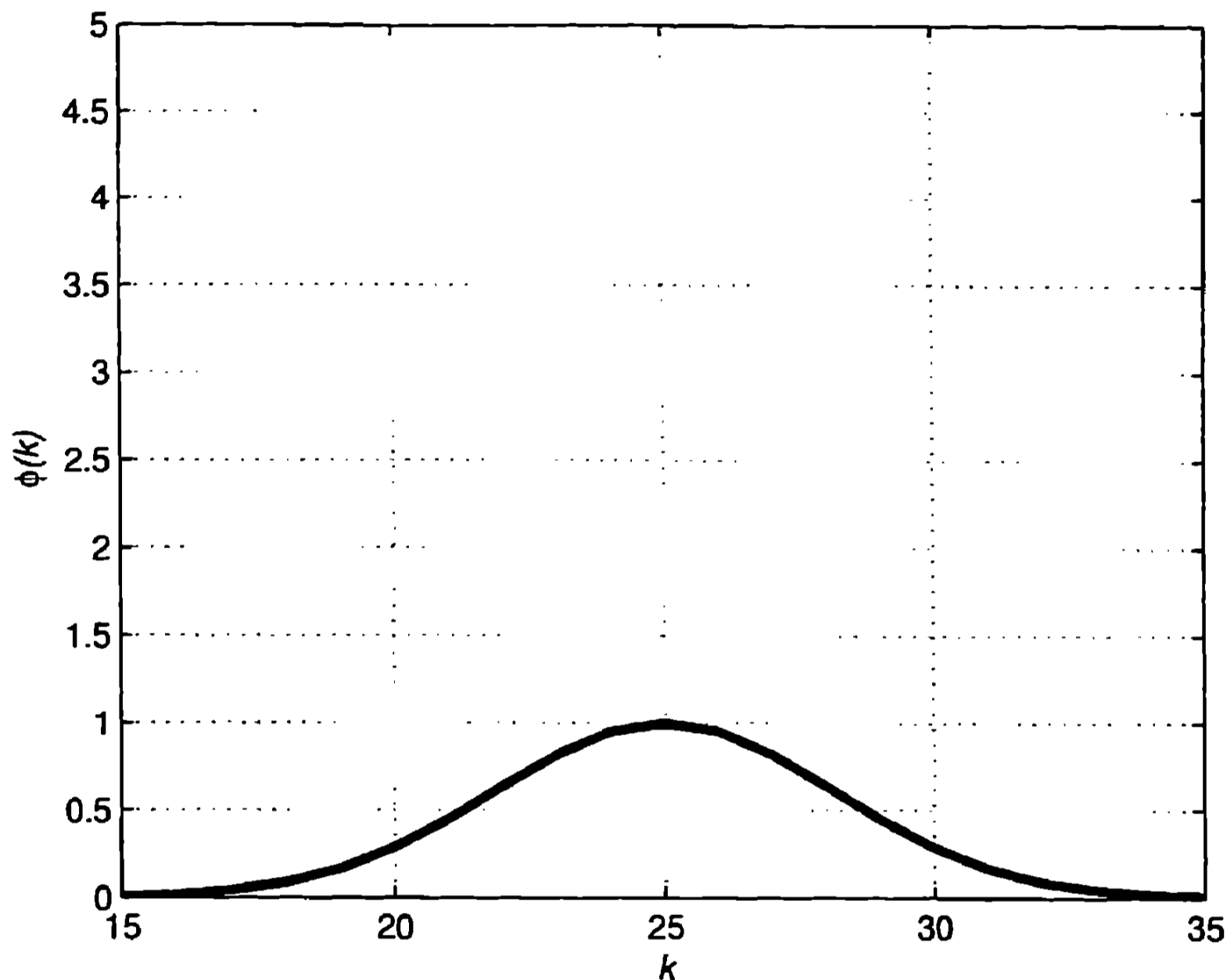


Рис. Ш.1. Характерный график функции $\phi(k - 25)$

7.3. Критерий волн-убийц

Как это принято в большинстве работ, посвященных волнам-убийцам, в качестве критерия аномальных поверхностных волн использовался амплитудный критерий:

$$\nu(t^*) = \frac{H_{max}(t^*)}{H_s(t^*)} \geq \nu^*,$$

где $H_{max}(t)$ — максимальная высота волнения в момент времени t ; $H_s(t)$ — значительная высота волнения в момент времени t , то есть средняя высота трети самых высоких волн.

Однако этот критерий, имеющий хорошее физическое обоснование, имеет существенный недостаток, который проявляется при обработке результатов вычислительных экспериментов. Этот недостаток состоит в том, что этот критерий неустойчив при малой вариации свободной поверхности. В разделе, посвященном устойчивости волн-убийц 22, мы рассмотрим этот вопрос подробно, а сейчас приведем критерий, который будет устойчивым по отношению к малым вариациям свободной поверхности, и который мы будем использовать в наших вычислительных экспериментах

$$\nu(t^*) = \frac{H_{max}(t^*)}{\bar{H}_s(t^*)} \geq \nu^*,$$

где $\bar{H}_s(t)$ — усредненная значительная высота волнения в момент времени t , т.е.

$$\bar{H}_s(t) = \frac{1}{\bar{T}} \int_{t-\bar{T}}^t H_s(\tau) d\tau, \quad \bar{T} > 0, \quad t > \bar{T}.$$

Здесь $H_s(\tau)$ — значительная высота волнения в момент времени τ , т.е. среднее значение высоты трети самых больших отдельных волн. Под отдельной волной в вычислительном эксперименте подразумевается область, расположенная между соседними локальными минимумами волновой поверхности. Таким образом, усредненная значительная высота волнения учитывает информацию о характерных высотах волн за весь период проведения вычислительного эксперимента. Это усреднение позволяет нивелировать вклад самой аномальной волны при расчете значительной высоты волнения. Значение $\nu^* = 2.1$ является общепринятым в литературе по волнам-убийцам. В разных задачах это значение может быть выбрано различным из диапазона $(2, 2.2)$, см. [79].

8. Численная схема

Рассмотрим численную схему для нахождения приближенных решений задачи (II.18).

Пусть $N \geq 1$ — фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать в виде

$$R^N(u, t) = 1 + \sum_{k=1}^N r_k(t) e^{-iku}, \quad (III.3)$$

$$V^N(u, t) = \sum_{k=1}^N v_k(t) e^{-iku}.$$

Использование представления в виде конечных сумм Фурье (III.3) имеет существенные преимущества. Действительно, пусть

$$f = \sum_{k=1}^N f_k e^{-iku},$$

тогда

$$f_u = \sum_{k=1}^N (-ik) f_k e^{-iku}.$$

Оператор P вычисляется следующим образом — для

$$g = \sum_{k=-N}^N g_k e^{-iku}$$

имеем

$$P[g] = g_0/2 + \sum_{k=1}^N g_k e^{-iku}.$$

Введем бинарную операцию «*», которая является замкнутой для множества функций вида (III.3). Пусть

$$A = \sum_{k=-N}^N a_k e^{-iku},$$

$$B = \sum_{k=-N}^N b_k e^{-iku}.$$

Тогда для $C = AB$ имеем

$$C = \sum_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}.$$

Операцию «*» введем следующим образом

$$A * B = \sum_{k=-N}^N c_k e^{-iku},$$

где c_k — коэффициенты Фурье функции C .

Приближенные решения R^N и V^N будем искать как решения системы уравнений

$$\begin{cases} R_t^N = i(U^N * R_u^N - U_u^N * R^N), \\ V_t^N = i(U^N * V_u^N - B_u^N * R^N) + g(R^N - 1), \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

где

$$U^N = P(V^N * \bar{R}^N + \bar{V}^N * R^N),$$

$$B = P(V^N * \bar{V}^N).$$

Система (III.4) решается явным методом Рунге—Кутта 4-го порядка точности по переменной t . Таким образом, можно сказать, что наша вычислительная схема представляет собой метод прямых для эволюционных уравнений.

Статистические характеристики волн-убийц

Один из основных вопросов в теории волн-убийц — это вопрос об оценке вероятности возникновения таких волн. Поэтому в настоящей главе мы с помощью вычислительных экспериментов по пробуем оценить вероятность встречи с такой волной.

9. О вероятности волны-убийцы

9.1. Распространение волн как квазислучайный процесс

Прежде чем мы будем рассматривать результаты вычислительных экспериментов сделаем несколько принципиальных замечаний относительно понятия «вероятность волны-убийцы». Само слово вероятность говорит о том, что мы имеем дело со случайным объектом в то время, как рассматриваемые нами уравнения (и их численная реализация) являются детерминированными. С другой стороны начальные условия для этих уравнений можно рассматривать, как случайное поле, поэтому и решения уравнений можно рассматривать как случайные. Однако даже после того, как фиксированы начальные условия и процедура нахождения численных решений строго определена, все равно, возникновение волн-убийц выглядит, как реализация случайного процесса (например, потока Пуассона) поскольку, кроме исключительных

случаев, динамика волн представляет собой достаточно сложное движение и может быть рассмотрена как квазислучайный процесс.

9.2. Распределение высот

Однако с вероятностью возникновения волн-убийц связан также и другой принципиальный вопрос. Для того, чтобы оценивать эту вероятность необходимо иметь четкое определение волн-убийцы. В рамках наших вычислительных экспериментов мы такое определение фиксируем с помощью амплитудного критерия. Амплитудный критерий, напомним, состоит в том, что отношение максимальной высоты волны к значительной высоте волн превосходит заранее выбранное пороговое значение. Выбор этого порогового значения осуществляется эмпирически. На рис. IV.1 мы приводим график плотности распределения высот волн в наших экспериментах. Вертикальной чертой отмечен амплитудный критерий для волн-убийц. Таким образом, те волны, которые находятся правее этой черты считаются волнами-убийцами.

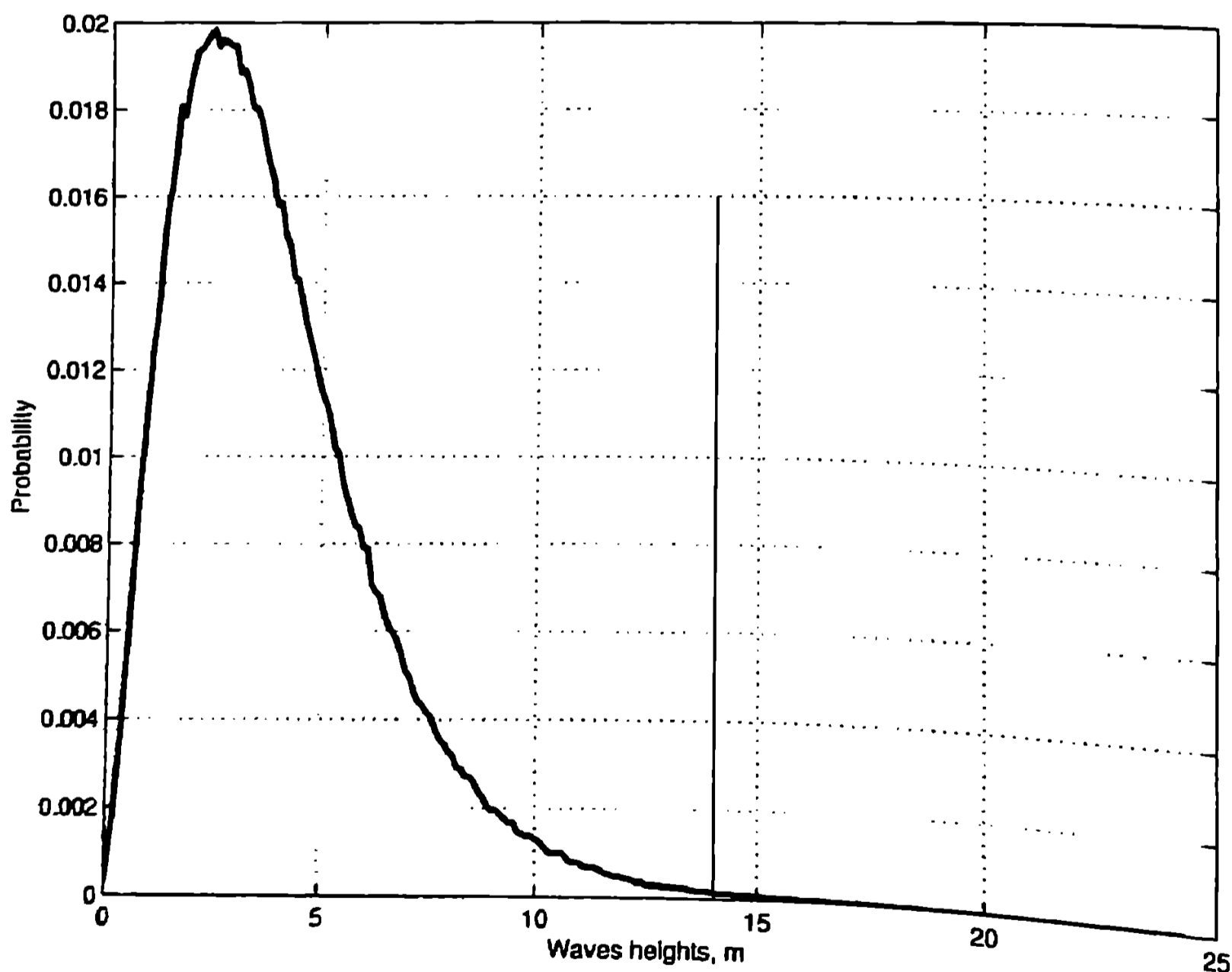


Рис. IV.1. Распределение высот волн

Для наглядности на рисунке IV.2 мы приводим увеличенную часть этого графика, из которой видно, что в наших экспериментах были

зарегистрированы весьма высокие волны, которые значительно превосходят амплитудный критерий.

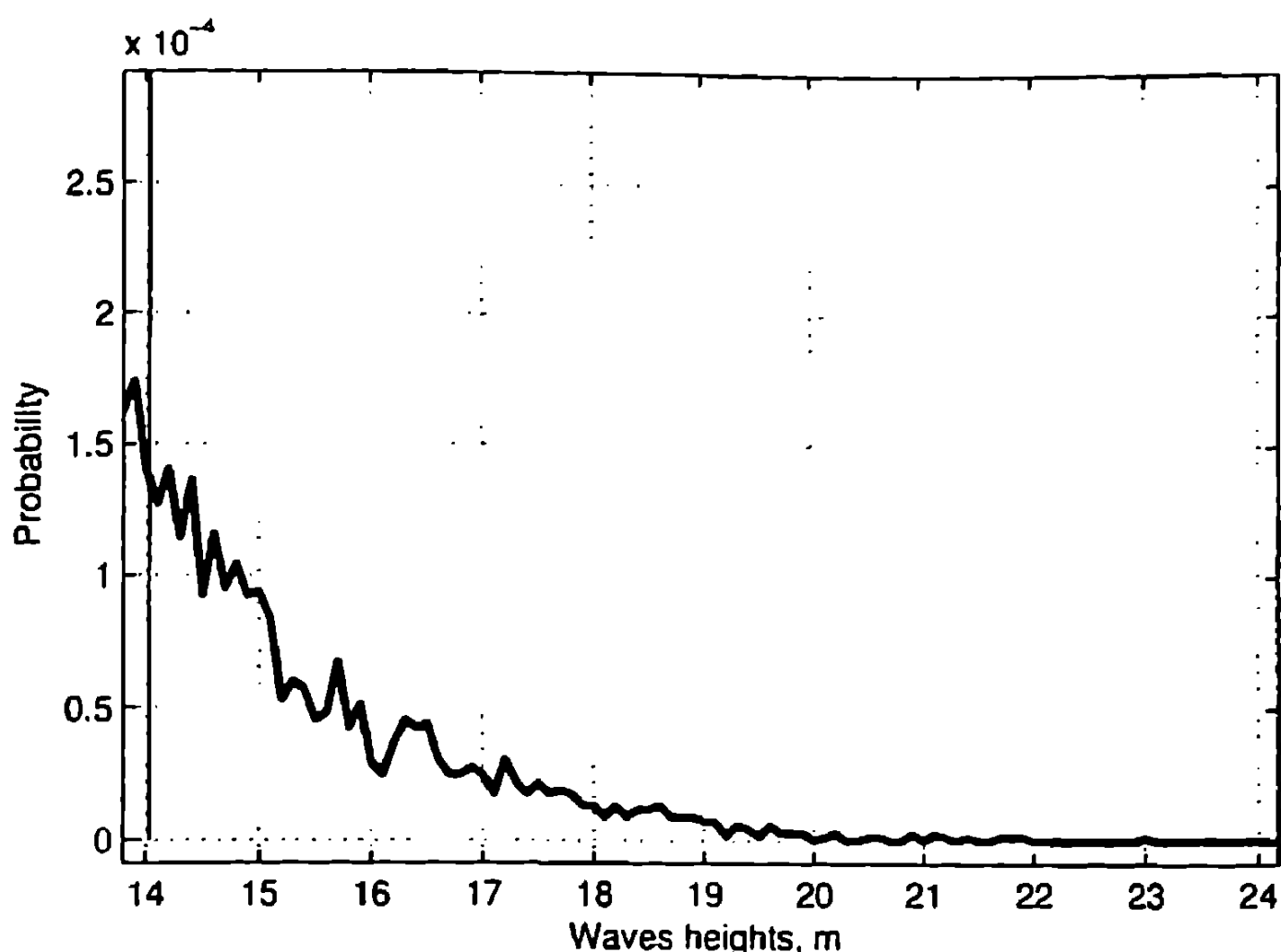


Рис. IV.2. Распределение высот волн

Важно отметить, что распределение, приведенное на рисунке IV.1 похоже на распределение Релея, которое используется для распределения волн в линейной теории. Однако наличие «хвостов» у распределений на рисунках IV.1–IV.2 показывает, что в нелинейном случае имеется расхождение с распределением Релея, и аномально большие поверхностные волны возникают чаще, чем это предсказано линейной теорией.

Разумеется, что одним точным значением трудно отделить волны-убийцы от волн, не являющихся таковыми. В данном случае мы имеем дело с нечетким понятием. При этом возможны следующие обобщения. Во-первых, возможно использовать критическое значение в качестве свободного параметра и таким образом результаты о вероятности возникновения волны-убийцы представлять, зависящими от параметра. Во-вторых, вместо критерия волны-убийцы можно использовать численный показатель опасности волны-убийцы. Оба этих подхода могут быть перспективными в том числе и для практических задач, но они обладают серьезным недостатком — отсутствием определенности в выводах. Поэтому в большинстве случаев мы будем использовать фиксированный амплитудный критерий.

9.3. Интенсивность возникновения волн-убийц

Другое обстоятельство, связанное с оценкой вероятности возникновения волны-убийцы состоит в том, что поскольку можно рассматривать динамику поверхностных волн неограниченно долго, то возникновение аномально больших поверхностных волн лишь вопрос времени. Используемые нами уравнения, содержащие диссипацию энергии (для исключения обрушения волн) и накачку (для поддержания энергии на заданном уровне), приводят к достаточно длинным траекториям рассматриваемой системы. Следовательно, следует рассматривать не вероятность возникновения, а интенсивность появления волн-убийц. Эта интенсивность позволяет оценить среднее время ожидания экстремальных волн.

Аналогичное замечание можно сделать и относительно пространства, на котором мы рассматриваем волновое движение. Как мы уже говорили, при численном моделировании резонно рассматривать периодическое по пространству волновое поле. В рассматриваемом периодическом домене может быть потенциально много единичных волн, что соответствует различной длине рассматриваемой области. Разумеется, что вероятность возникновения волны-убийцы должна зависеть от длины этой области. Это обстоятельство было проверено в наших вычислительных экспериментах и было установлено, что интенсивность возникновения волн-убийц пропорциональна ширине периодического домена.

Таким образом, чтобы говорить о вероятности волны-убийцы необходимо фиксировать пространственную область и временной интервал ожидания. Далее мы приведем простую методику для оценивания вероятности возникновения волн-убийц.

10. Результаты вычислительных экспериментов и статистика экстремальных волн

Мы будем рассматривать результаты вычислительных экспериментов, описанные в главе III.

Для получения статистических характеристик аномальных поверхностных волн нами были проведены большие серии одношаговых вычислительных экспериментов. Среднее количество K_0 отдельных волн в начальном профиле волновой поверхности равнялось 25, 50 и 100. Квадрат средней крутизны принимал значения

$$\mu^2 \in \{2.06 \cdot 10^{-3}; 3.08 \cdot 10^{-3}; 4.10 \cdot 10^{-3}\},$$

дисперсия

$$K = 25 : D \in \{5; 10; 15; 20\};$$

$$K = 50 : D \in \{10; 20; 30; 40\};$$

$$K = 100 : D \in \{20; 40; 60; 80\}.$$

Для каждой тройки $\{K_0, \mu^2, D\}$ были проведены продолжительные вычислительные эксперименты длительностью примерно $75 \cdot 10^3 - 157 \cdot 10^3$ периодов волн.

Интенсивность возникновения волн-убийц в этих экспериментах рассчитывались как отношение количества возникающих в рассматриваемом эксперименте волн-убийц (согласно выбранному критерию) к длительности этого эксперимента

$$\lambda = \frac{N}{T}.$$

Таким образом, интенсивность является размерной величиной. Зная интенсивность можно рассчитать среднее время ожидания волны-убийцы в данном эксперименте. Приведем результаты этих вычислительных экспериментов на графиках IV.3–IV.5.

Как мы уже отмечали, получаемые интенсивности зависят от ширины вычислительного домена, что выражается в значении волнового числа — K_0 . Покажем, что эта зависимость близка к линейной, что хорошо соответствует априорным представлениям — интенсивность возникновения волн-убийц пропорциональна области наблюдения. Для этого мы усреднили интенсивности для различных параметров μ^2 и D для каждого значения K_0 . Результат показан на рис. IV.6.

Поскольку имеет место линейная зависимость, то можно вычислить этот коэффициент пропорциональности, который мы обозначим через λ_0

$$\lambda(d) = \lambda_0 d,$$

где d есть ширина домена в метрах. Разумеется, из наших экспериментов мы можем вычислить величину λ_0 , зависящую от длины волны L , поскольку ширина домена оценивается по формуле $L \cdot K_0$. Из графика можно написать эмпирическую формулу

$$\lambda_0(L) = \frac{1.47 \cdot 10^{-6}}{L}.$$

Для примера рассмотрим случай волн зыби, для которых наиболее всего подходят наши эксперименты. Будем рассматривать волны с длиной $L = 250$ м и периодом $p = 12.7$ с. Для этого случая мы имеем

$$\lambda_0 \approx 6 \cdot 10^{-9} (m \cdot s)^{-1}.$$

Наличие константы, не зависящей от ширины домена позволяет перейти к оценке вероятности встречи с волной-убийцей в заданной точке.

Рассмотрим вопрос о выборе периодических граничных условий при моделировании поверхностного волнения. Как мы уже отмечали, периодические условия позволяют эффективно использовать численные методы, основанные на разложении периодических функций. Альтернативой периодическим условиям является рассмотрение бесконечно области, однако в этом случае необходимо будет использовать условия затухания на бесконечности. При этом следует понимать, что океан не периодический, но и не бесконечный. В этом смысле использование периодических условий является не хуже с точки зрения близости к реальности.

Есть еще один вариант — рассматривать почти-периодические функции в качестве свободной поверхности. Почти-периодическая функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ может быть представлена в следующем виде

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\lambda_k x i},$$

где $\lambda_k \in \mathbb{R}$. При этом частоты λ_k не обязаны быть соизмеримыми. В случае, когда в разложении функции есть несоизмеримые частоты, функция $f(x)$ не будет периодической. В этом смысле можно моделировать более сложные поверхности, чем периодические волны. Впрочем, любая почти-периодическая функция может быть сколь угодно близко аппроксимирована периодическими функциями.

Возвращаясь к периодическим функциям, следует учитывать, что в рассматриваемой динамической системе периодические условия могут влиять на статистику возникновения волн-убийц. Поэтому факт, что интенсивность возникновения волн-убийц зависит линейно от размера рассматриваемого домена позволяет оправдать использование периодических краевых условий и использовать эти результаты для предсказания времени ожидания волны-убийцы в заданном районе океана.

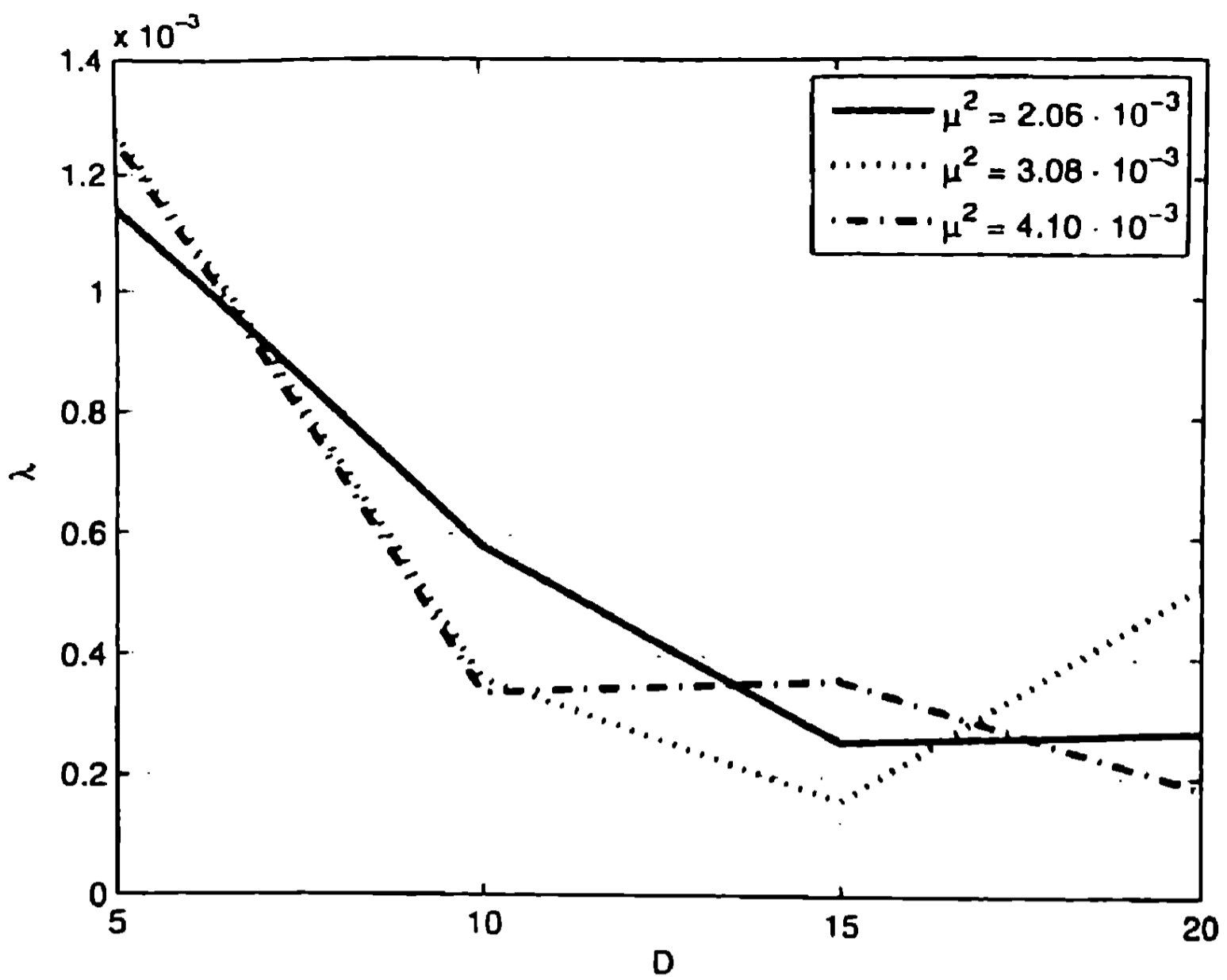


Рис. IV.3. Интенсивность возникновения волн-убийц при $K = 25$

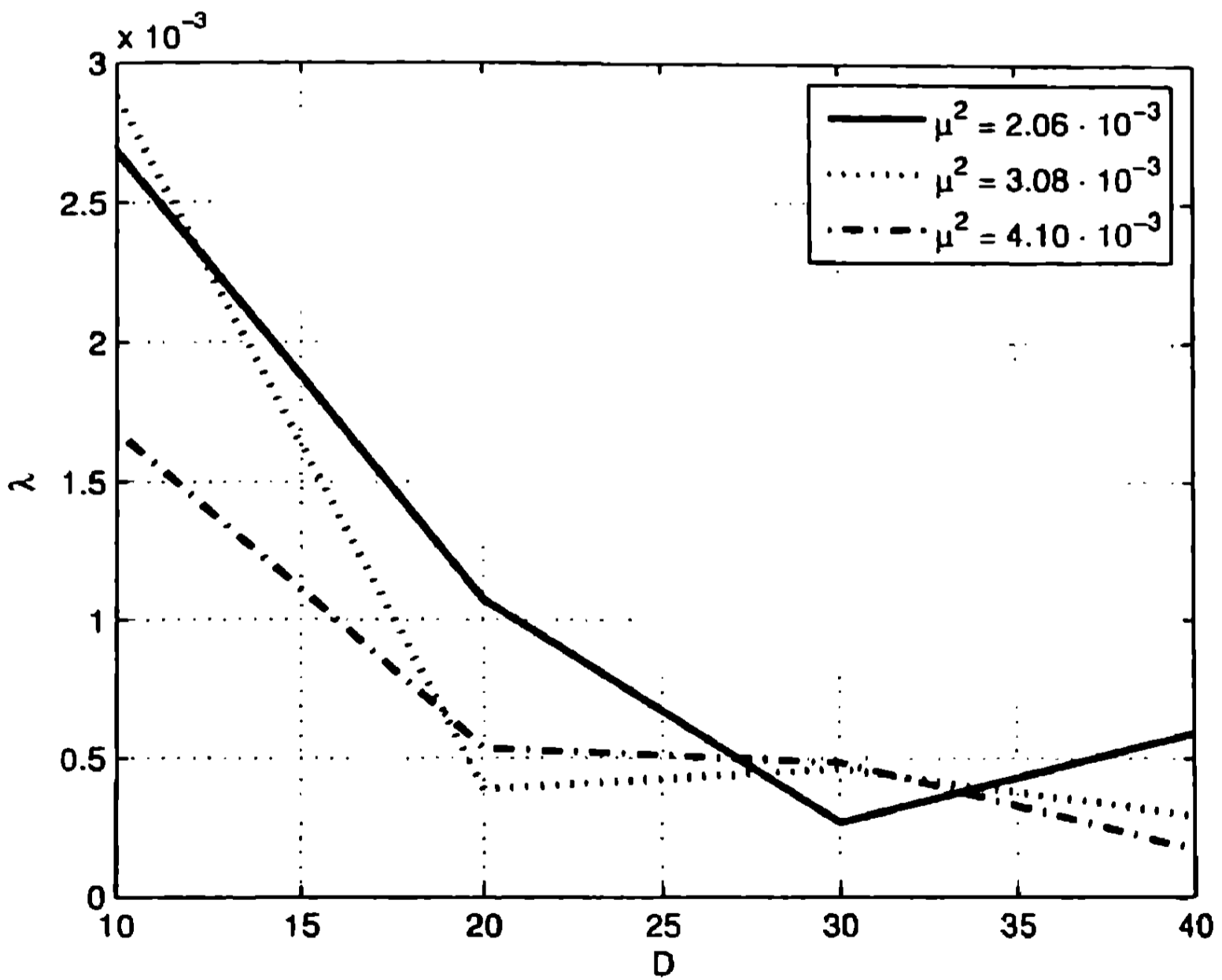


Рис. IV.4. Интенсивность возникновения волн-убийц при $K = 50$

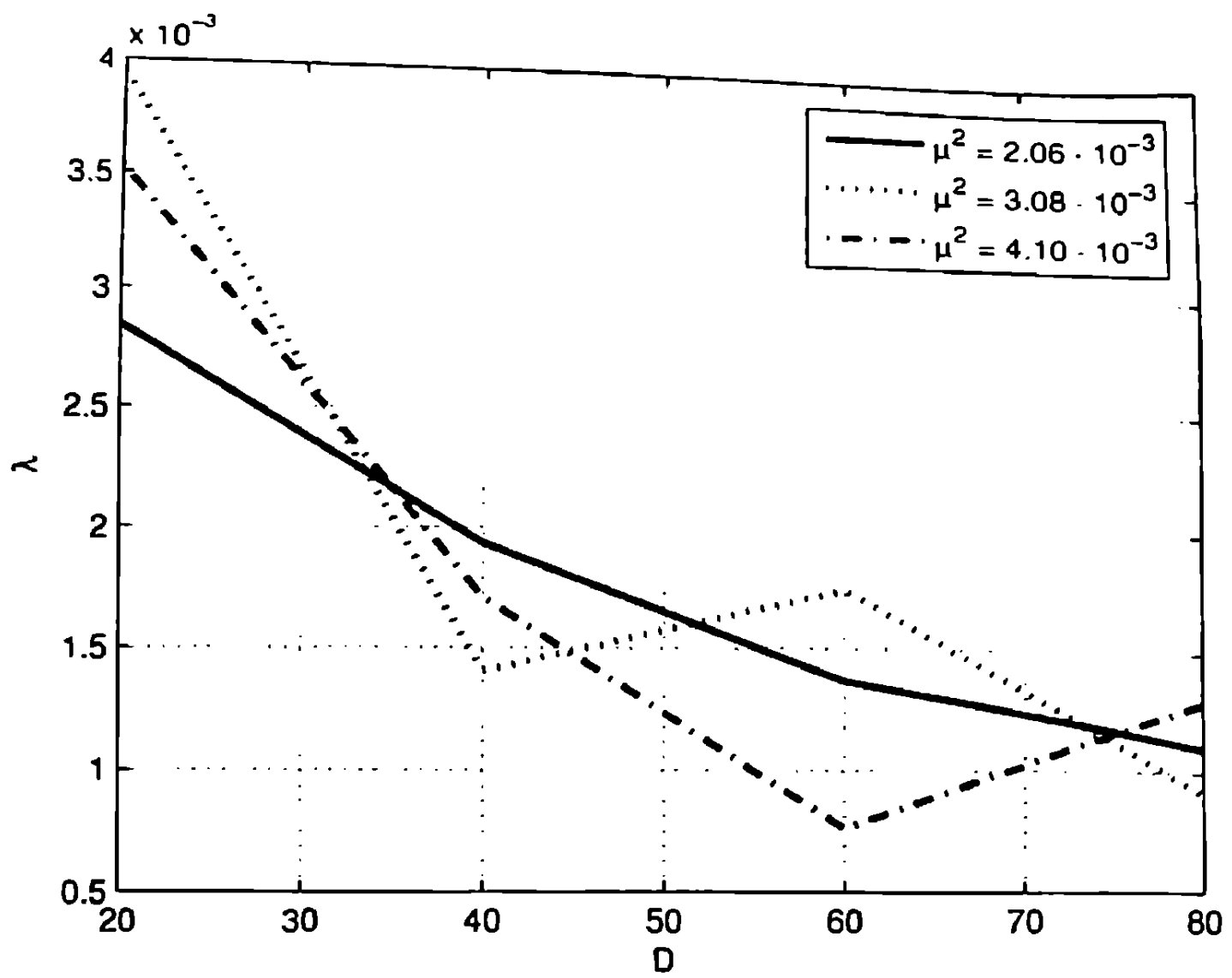


Рис. IV.5. Интенсивность возникновения волн-убийц при $K = 100$

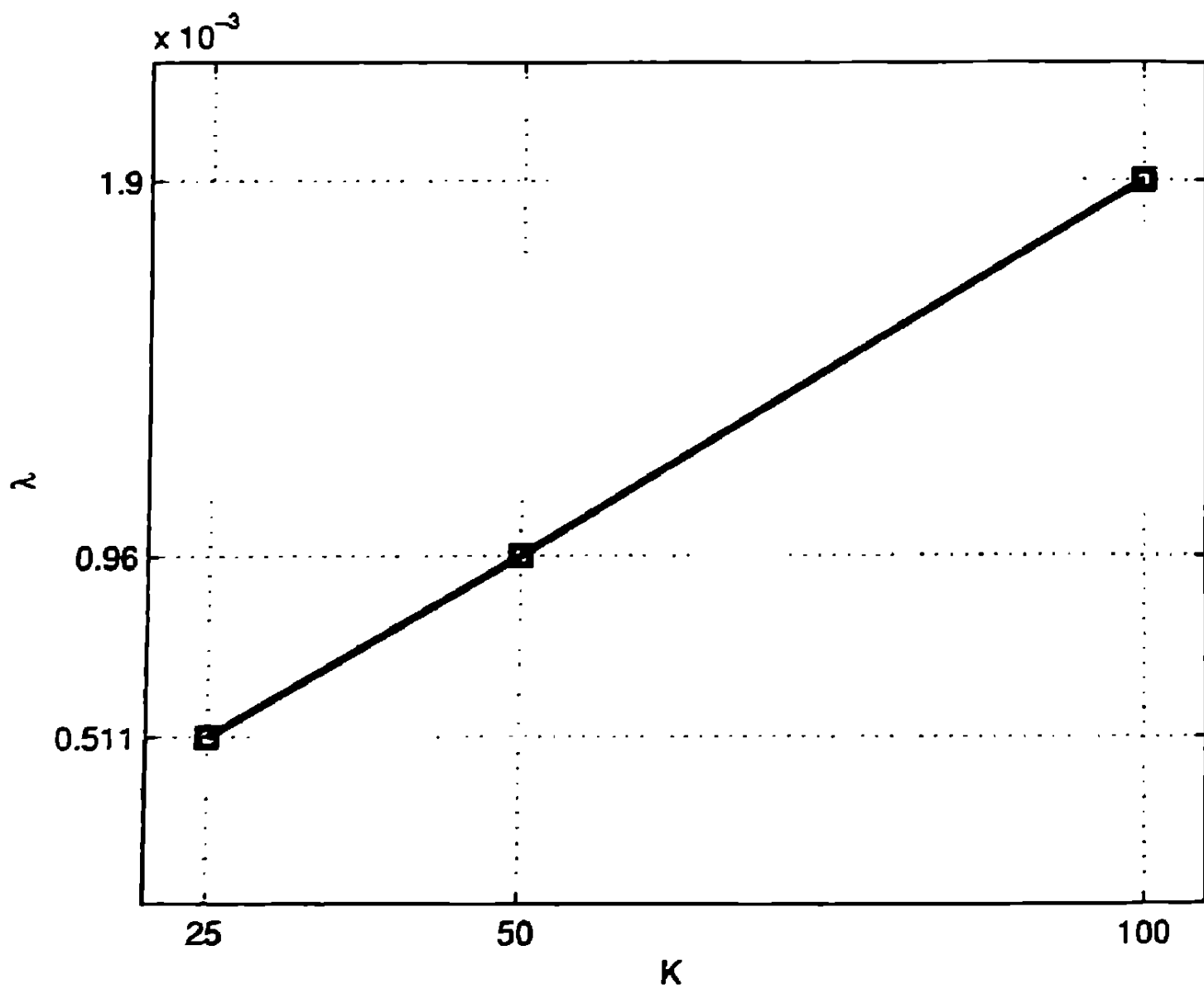


Рис. IV.6. Средняя интенсивность возникновения волн-убийц для различных значений K_0

11. Оценка вероятности встречи с волной-убийцей

Покажем, как можно применять результаты предыдущего параграфа для оценки вероятности встречи с экстремальной волной в заданной точке в океане. Предположим, что нас интересует вероятность встречи с волной-убийцей в определенной точке в районе, где имеют место волны зыби. Пусть мы имеем волны с длиной $L = 250$ м и периодом $p = 12.7$ с. Для нашей оценки необходимо иметь оценку среднего времени жизни волны-убийцы, которую мы обозначаем через τ . Из наших экспериментов по моделированию волн зыби известно, что величина τ может быть оценена как

$$\tau = 108\text{с.}$$

Оценим среднее расстояние, проходимое волной-убийцей по формуле

$$R = \frac{\tau}{p}.$$

В нашем случае $R = 2125$ м. Далее, можно оценить среднее время ожидания волны убийцы в фиксированной точке можно с помощью соотношения

$$T = \frac{1}{\lambda_0(L)R} = \frac{p}{\lambda_0\tau L}.$$

Получаем $T \simeq 78431$ с или $T \simeq 21.8$ часов. Таким образом, в заданной точке волна-убийца будет регистрироваться в среднем один раз в течение 21.8 ч. Этот результат хорошо согласуется с теоретическими оценками вероятности возникновения аномально больших волн с помощью распределения Релея. Действительно, в [21] подсчитано, что согласно распределению Релея волна в двое превышающая значительную высоту волнения должна возникать раз в 3000 волн. В нашем случае $\nu^* = 2.1$, поэтому вероятность такой волны получается раз в 6757 волн, что при периоде 12.7 с соответствует 23.8 часов. Более того, полученная оценка примерно совпадает с данными натуральных экспериментов, приведенными в [12].

Заметим также, что в наших вычислительных экспериментах наблюдались и волны-убийцы с параметром ν значительно превышающим пороговое значение 2.1. В частности, были зарегистрированы волны со значением $\nu > 2.4$, что согласно распределению Релея весьма редкое явление. Согласно этому распределению такая волна возможна примерно раз миллион волн, что соответствует примерно раз

в полгода. Следовательно, наши эксперименты подтверждают гипотезу, что распределение Релея не описывает вероятность возникновения волн-убийц.

12. О законе распределения времени ожидания волн-убийц

Когда имеют дело с редкими событиями, то обычно их появление описывают законом Пуассона, что соответствует экспоненциальному закону распределения времени ожидания этого события. Такой подход неоднократно применялся и в случае с волнами-убийцами, например в [12]. Имея результаты больших серий вычислительных экспериментов, в которых периодически возникают волны-убийцы, мы можем проверить эту гипотезу с помощью методов математической статистики.

12.1. Гипотеза об экспоненциальном законе

Для исследования было проведено две серии экспериментов согласно схеме, описанной в главе III. В каждом из экспериментов в начальный момент времени волновое число принимало значение $K_0 = 50$, дисперсия $D = 20$, квадрат средней крутизны $\mu^2 = 2.06 \cdot 10^{-3}$ и $\mu^2 = 4.10 \cdot 10^{-3}$ соответственно. Была проведена масштабная серия однотипных экспериментов общей длительностью примерно 85800 периодов волн.

Мы будем рассматривать случайную величину — время ожидания волны-убийцы, которую обозначим через T . Для применения статистических критериев выдвинем основную и альтернативную гипотезы:

$H_0 : T \sim F_{exp}(\lambda)$ — случайная величина T имеет экспоненциальный закон распределения с параметром λ ;

$H_1 : T \not\sim F_{exp}(\lambda)$ — случайная величина T не распределена по экспоненциальному закону.

Напомним, что экспоненциальный закон имеет следующую функцию распределения:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

где $\lambda > 0$ - параметр распределения.

12.2. Статистическая проверка гипотезы

Для проверки нашей статистической гипотезы мы использовали стандартный метод — критерий согласия χ^2 с уровнем значимости $\alpha = 0.05$. Для проверки выдвинутой гипотезы вычислялась величина:

$$\psi_T = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i},$$

где m — число равных интервалов, на которые разбивается выборка, n_i — число попаданий в i -й интервал, $n'_i = F(t_{i+1}) - F(t_i)$ — теоретические частоты, F — функция распределения экспоненциального закона. Значение ψ_T сравнивается с табличным критическим значением χ_k^2 , где $k = (m - 1)$ — количество степеней свободы.

Если $\psi_T \leq \chi_k^2$, то гипотеза H_0 принимается с вероятностью $1 - \alpha$, если же $\psi_T > \chi_k^2$, то H_0 отвергается в пользу альтернативной гипотезы на уровне значимости α .

Кроме того, по значениям эмпирической и теоретической функции плотности вероятности для каждого из экспериментов был вычислен коэффициент детерминации, рассчитываемый по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (p_i - \hat{p}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (p_i - \bar{p}_i)^2},$$

где p_i — значения эмпирической функции плотности вероятности, \hat{p}_i — значения теоретической функции плотности вероятности

$$\bar{p}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i.$$

12.3. Случай с одинаковыми параметрами волнения

Сначала проверим нашу гипотезу для каждой серии экспериментов с одинаковыми значениями квадрата средней крутизны $\mu^2 = 2.06 \cdot 10^{-3}$ и $\mu^2 = 4.10 \cdot 10^{-3}$, а потом для смешанного случая.

Для статистического анализа сначала были рассмотрены результаты вычислительных экспериментов, в которых квадрат средней крутизны принимал значение $\mu^2 = 2.06 \cdot 10^{-3}$. Общая длительность экспериментов в этом случае составила $T = 41400$ периодов волн, в течение которых была зарегистрирована $N = 61$ волна-убийца. Математическое ожидание имело значение $E = 1203$, а дисперсия $\sigma^2 = 1200519$.

Параметр экспоненциального закона распределения $\lambda = 0.0008$. Соотношение $\sigma/E = 0.91$ показывает хорошее соответствие гипотезе H_0 . Теоретическая функция плотности распределения имеет вид

$$p(t) = 0.0008 \cdot e^{-0.0008t}, \quad t > 0.$$

Сравнительный график теоретической и эмпирической плотности распределения времени ожидания волн-убийц в вычислительном эксперименте представлен на рис. IV.7.

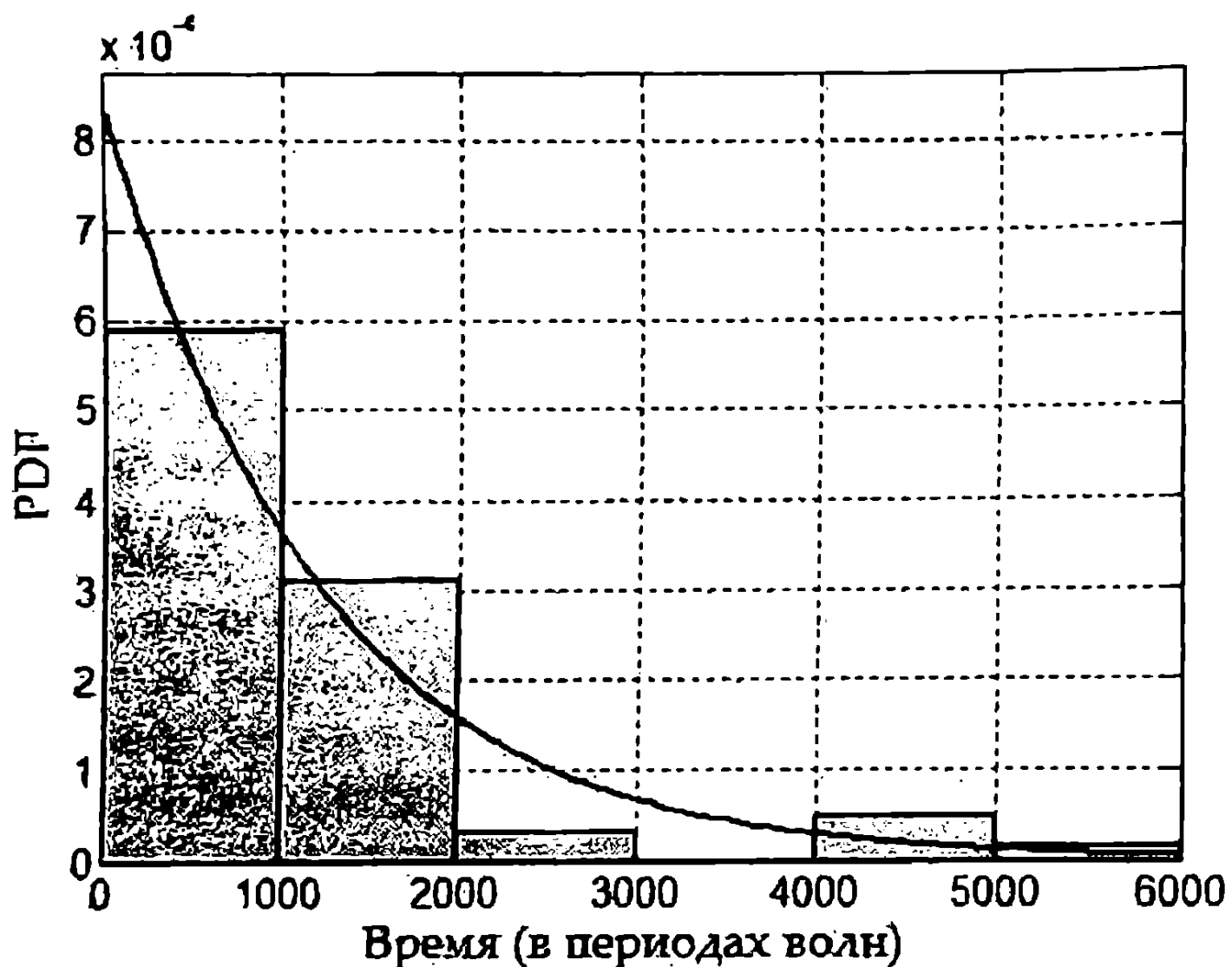


Рис. IV.7. Сравнительный график теоретической и эмпирической функции плотности распределения для экспериментов с $\mu^2 = 2.06 \cdot 10^{-3}$, сплошная линия — теоретическая плотность вероятности, гистограмма — эмпирическая плотность вероятности

Аналогичные вычисления проводились и для экспериментов, в которых квадрат средней крутизны принимал значение $\mu^2 = 4.10 \cdot 10^{-3}$. В этом случае общая длительность экспериментов составила примерно $T = 44400$ периодов волн, общее количество волн-убийц $N = 105$. Соответствующие величины имели следующие значения $E = 894.87$, $\sigma^2 = 883002.3$, параметр плотности распределения $\lambda = 1.1 \cdot 10^{-3}$. Соотношение $E/\sigma = 0.95$ также указывает на применимость экспоненци-

ального закона распределения. Плотность вероятности имеет вид

$$p(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Сравнительный график теоретической и эмпирической плотности распределения времени ожидания волн-убийц в вычислительном эксперименте представлен на рис. IV.8.

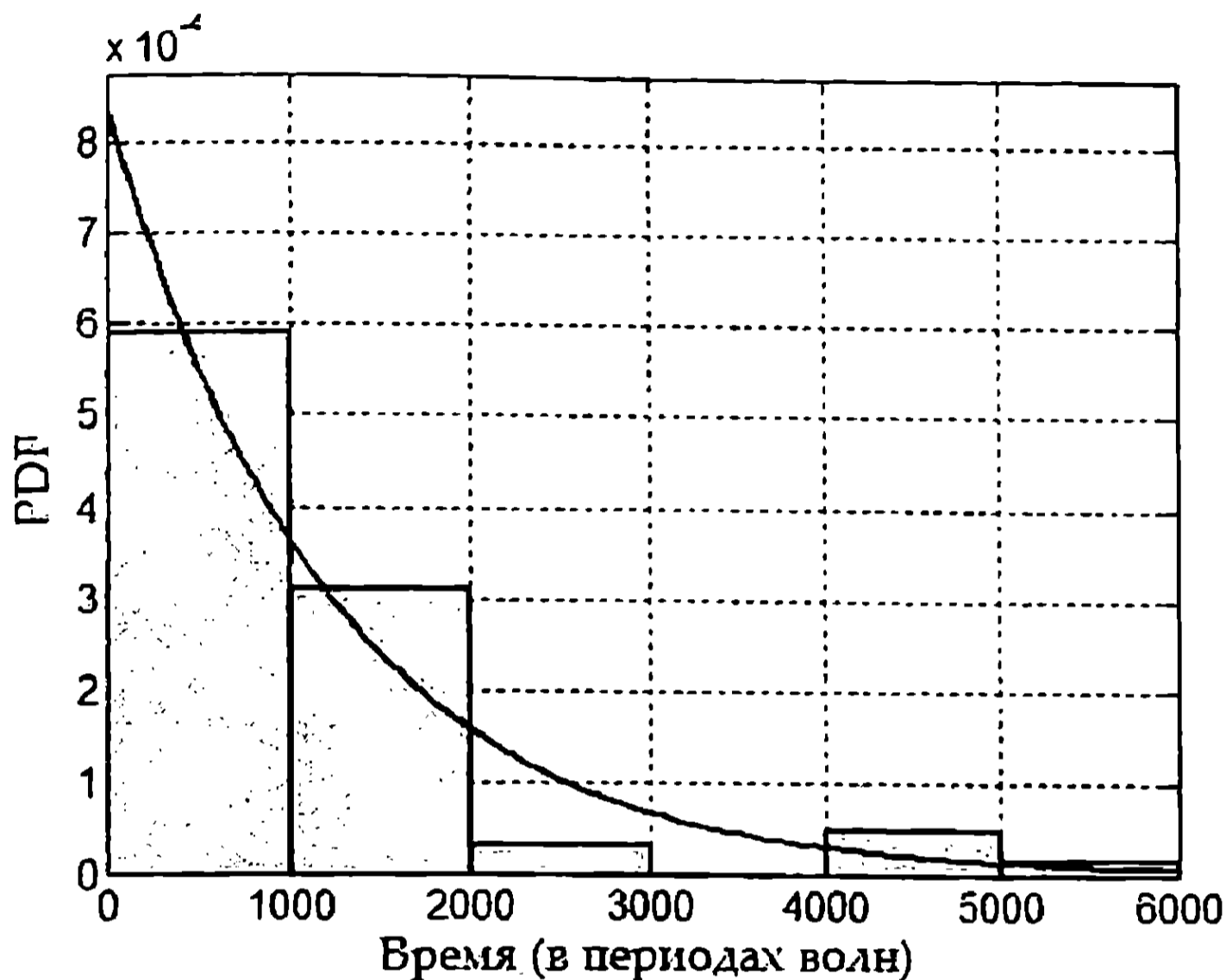


Рис. IV.8. Сравнительный график теоретической и эмпирической функции плотности распределения для экспериментов с $\mu^2 = 4.10 \cdot 10^{-3}$, сплошная линия — теоретическая плотность вероятности, гистограмма — эмпирическая плотность вероятности

При проверке гипотезы по критерию χ^2 , при $m = 12$, получены следующие результаты: $\psi_T = 6.01$, $\chi_k^2 = 9.49$, $\psi_T \leq \chi_k^2$, следовательно, гипотеза H_0 об экспоненциальном законе распределения принимается на уровне значимости $\alpha = 0.05$. Коэффициент детерминации $R^2 = 0.97$ также позволяет сделать вывод о том, что высокая доля дисперсии эмпирических значений плотности вероятности объясняется полученной теоретической функцией.

12.4. Случай смешанных параметров волнения

Теперь проведем статистическую проверку гипотезы об экспоненциальном распределении времени ожидания волны-убийцы в случае, когда примерно в половине вычислительных экспериментов квадрат средней крутизны принимал одно значение, а в другой половине — другое значение. Этот случай соответствует ситуации, когда имеются волны с различными параметрами крутизны.

Общая длительность эксперимента составила $T = 85800$ периодов волн, количество зарегистрированных волн-убийц составило $N = 166$. Математическое ожидание, дисперсия и интенсивность принимали следующие значения: $E = 1007.79$, $\sigma^2 = 1015190$, параметр плотности распределения $\lambda = 9.9 \cdot 10^{-4}$. Соотношение: $\sigma/E = 0.99$. Плотность вероятности выражается соотношением

$$p(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Сравнительный график теоретической и эмпирической плотности распределения времени ожидания волн-убийц в вычислительном эксперименте представлен на рис IV.9.

В результате вычислений по критерию χ^2 при $m = 10$ интервалах разбиения мы получили, что $\psi_T = 14.88$, $\chi_k^2 = 12.59$, $\psi_T > \chi_k^2$, т.е. гипотеза H_0 об экспоненциальном законе распределения отвергается на уровне значимости $\alpha = 0.05$. В данном случае критерий χ^2 не дает оснований считать, что при рассмотренных параметрах волнения время ожидания волн-убийц описывается экспоненциальным законом распределения. Однако коэффициент детерминации принимал значение $R^2 = 0.99$, что свидетельствует о том, что высокая доля дисперсии эмпирических значений плотности вероятности объясняется полученной теоретической функцией. В данном случае можно считать, что время ожидания волны-убийцы также приближенно описывается экспоненциальным распределением.

Интересно отметить, что эмпирическая функция плотности вероятности в наших экспериментах имеет «неэкспоненциальные» хвосты, что свидетельствует о том, что в экспериментах всегда встречались очень большие интервалы между двумя соседними волнами-убийцами.

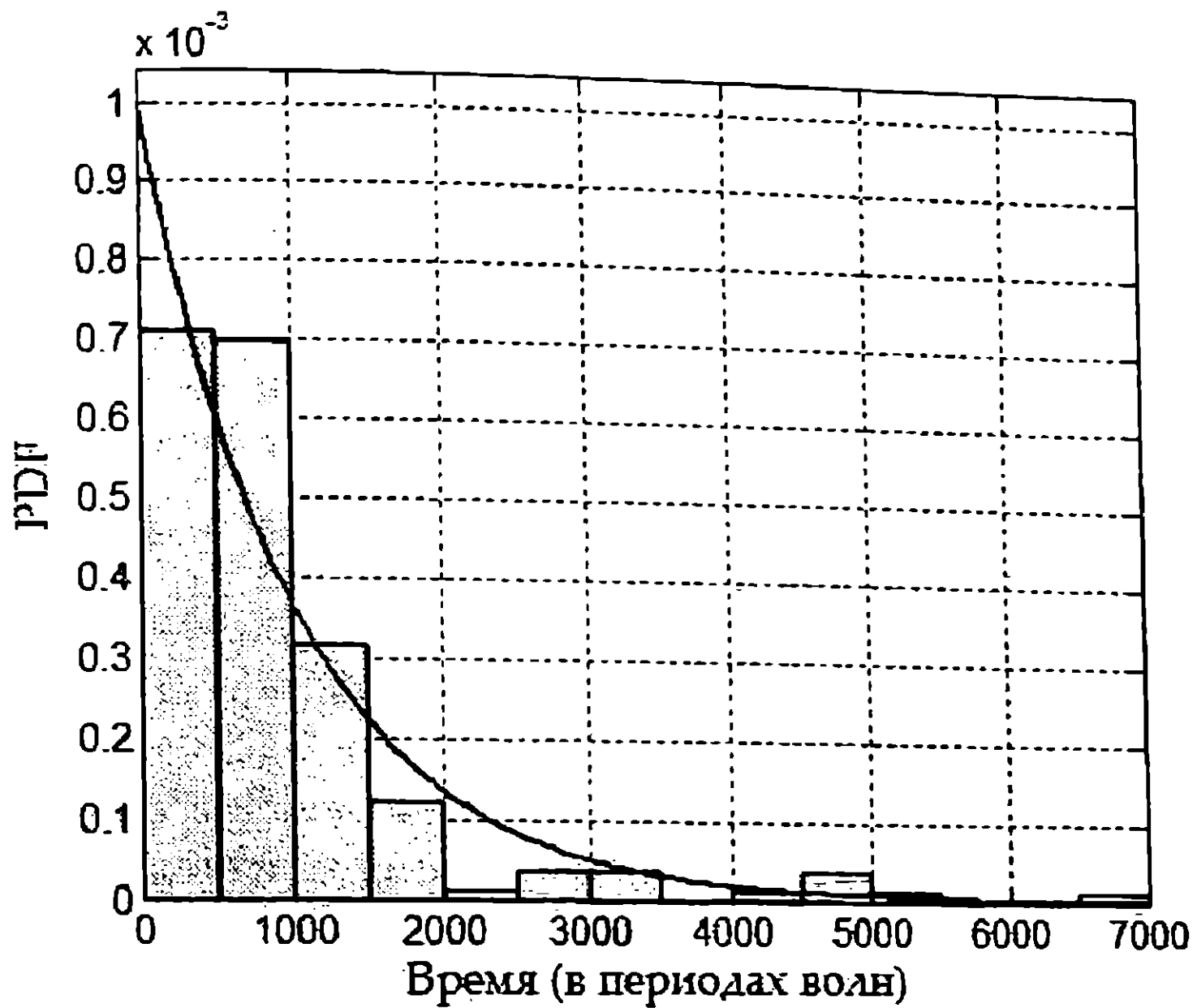


Рис. IV.9. Сравнительный график теоретической и эмпирической функции плотности распределения для экспериментов с различными значениями μ^2 , сплошная линия — теоретическая плотность вероятности, гистограмма — эмпирическая плотность вероятности

Глава V

Характеристики волн-убийц

13. Процессы концентрации энергии и импульса

Более-менее очевидно, что формирование волн-убийц представляет собой локальную в пространстве концентрацию энергии системы поверхностных волн на воде. Причем эти процессы концентрации с одной стороны протекают стремительно, а с другой есть все основания полагать, что стремление к концентрации энергии является характерной чертой динамической системы, описывающей волны на воде.

Используя вычислительные эксперименты, основанные на численном решении уравнений гидродинамики, мы можем рассматривать количественные характеристики процессов концентрации энергии. Поскольку мы имеем дело со сплошной средой, то можно использовать плотность энергии в рассматриваемой системе, однако мы будем рассматривать энергию отдельных волн.

13.1. Формальная модель концентрации параметров отдельных волн

Профиль свободной поверхности задается функцией $y = y(x, t)$, являющейся 2π -периодической по переменной x . Без ограничения общности, мы можем считать, что при всех фиксированных значениях переменной t функция $y = y(x, \cdot)$ является достаточно гладкой (существует не менее 2-х непрерывных производных по x) и имеет ровно N мини-

мумов и N максимумов. Таким образом, мы имеем разбиение отрезка $[0, 2\pi]$ на N подынтервалов

$$[0, 2\pi] = \bigcup_{i=1}^N [x_{i-1}, x_i],$$

где x_i — точки минимумов (мы для простоты предположили, что в точке $x_0 = 0$ функция $y(x, \cdot)$ имеет минимум). Области

$$W_i(t) = \{(x, y) : -\infty < y < y(x, t), x_{i-1}(t) < x < x_i(t)\},$$

$$i = 1, \dots, N$$

будем называть отдельными волнами. Вообще говоря, для различных значений t количество отдельных волн может меняться, но для сокращения письма мы будем пользоваться обозначениями N и W_i для некоторого значения t . В случае, когда необходимо подчеркнуть, какой момент времени мы имеем в виду, будем писать N_t и $W_i(t)$.

Для каждой волны W_i можно вычислить полную энергию \tilde{E}_i (кинетическую \tilde{T}_i и потенциальную \tilde{U}_i) и модуль импульса \tilde{I}_i (горизонтальную \tilde{I}_i^x и вертикальную \tilde{I}_i^y компоненты).

Для анализа удобно использовать следующую нормировку для характеристик отдельных волн. Пусть через \tilde{X}_i обозначена какая-нибудь характеристика $\tilde{E}_i, \tilde{T}_i, \tilde{U}_i, \tilde{I}_i, \tilde{I}_i^x$ или \tilde{I}_i^y . Перенумеруем набор $\tilde{X}_i, i = 1, \dots, N$ так, чтобы

$$|\tilde{X}_1| < |\tilde{X}_2| < \dots < |\tilde{X}_N|$$

и обозначим его через \bar{X}_i . Далее построим набор величин

$$X_i = \frac{|\tilde{X}_i|}{\bar{X}},$$

где

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_i.$$

Значение величины X_i показывает, как относится значение характеристики i -ой волны к среднему значению \bar{X} .

Мы будем сравнивать графики величин X_i , построенные в начальный момент времени и в момент времени образования волны-убийцы. Эти диаграммы показывают характерные значения концентрации рассматриваемых величин в момент образования волны-убийцы.

13.2. Характерный пример концентрации параметров волн в момент формирования волны-убийцы

Рассмотрим характерный пример формирования волны-убийцы. В данном эксперименте начальное поле волнения состояло из цуга 25 волн, бегущих в одну сторону. Квадрат средней крутизны принимал значение $\mu^2 = 2.06 \times 10^{-3}$, дисперсия — $D = 5$. Длительность эксперимента составляла примерно 500 периодов. Примерно через 355 периодов возникла волна-убийца. Максимальное значение функционала ν достигало значения

$$\nu(t^*) = 2.32.$$

Временной график значений $\nu(t)$ приведен на рис. V.1.

Теперь рассмотрим концентрацию энергии и импульса в момент образования волны-убийцы на рисунках V.2–V.3. Для наглядности мы приведем также графики концентрации энергии и импульса в начальный момент времени.

Таким образом, из рис. V.2 мы видим, что если в начальный момент времени график концентрации близок к линейной функции (линейный коэффициент детерминации $R^2 = 0.9$), то в момент образования волны-убийцы три самых больших волны концентрируют в себе большую часть энергии. Абсолютные значения концентрации E_i на этих графиках показывают, во сколько раз энергия i -ой волны превосходит среднее значение энергии волн в данный момент времени. Чтобы оценить динамику максимальной концентрации энергии по времени, приведем график максимальных значений концентрации энергии в вычислительном эксперименте на рис. V.4.

Приведем также гистограмму средних значений концентрации энергии и импульса, построенную по большой серии однотипных вычислительных экспериментов (см. рис. V.5). На этой гистограмме показаны средние значения максимальной концентрации характеристик в момент образования волны-убийцы.

13.3. Корреляция между концентрацией энергии и максимальной амплитудой

Приведенная картина концентрации энергии и импульса является характерной при формировании волн-убийц. Теперь рассмотрим совместное двумерное распределение параметра ν и концентрации полной энергии E для самой большой волны в каждый момент времени вычислительного эксперимента. Подавляющее большинство (около 98%) реализаций ν_{max} , E_N подчиняется нормальному закону распределения

вероятностей. Эти величины распределены следующим образом

$$\nu_{max} \sim N(1.54; 2.6 \cdot 10^{-2}),$$

$$E_N \sim N(4.8; 0.895).$$

Коэффициент корреляции между этими величинами $r = 0.85$. Заметим, что величина E_N обозначает максимальную концентрацию энергии.

Построим эллипс рассеяния для данного примера, который имеет эксцентриситет $e = 0.985$ и эллиптичность $k = 0.029$. На рис. V.6 изображен этот эллипс рассеяния, точки внутри эллипса соответствуют парам $\{\nu_{max}, E_{max}\}$, распределенным по нормальному двумерному закону распределения.

Точки вне эллипса соответствуют парам $\{\nu_{max}, E_{max}\}$, не удовлетворяющим нормальному закону. Они соответствуют «ненормальным», аномальным волнам, т.е. имеющим или аномально большую высоту, или аномально высокую энергию. Заметим, что наблюдаются лишь отклонения в большую сторону.

Можно построить также регрессионную зависимость между значениями концентрации высоты волны-убийцы и концентрации энергии этой волны. По итогам большой серии вычислительных экспериментов мы фиксировали значения концентраций высоты и энергии для волн-убийц в тот момент времени, когда значение параметра ν для них было максимальным. Регрессионная зависимость представлена на рис. V.7. Уравнение линейной регрессии имеет вид

$$y = 4.1x - 4.4,$$

коэффициент линейной детерминации $R^2 = 0.834$.

С помощью вычислительных экспериментов были рассмотрены процессы локальной концентрации энергии в момент формирования экстремальных поверхностных волн — волн-убийц. Получены количественные оценки этих процессов и показано, что одиночная аномально большая волна может концентрировать в себе энергию на порядок большую, чем средняя энергия окрестных волн.

Показана значительная корреляция между амплитудным критерием волны-убийцы и концентрацией энергии, что позволяет по новому взглянуть на определение волны-убийцы.

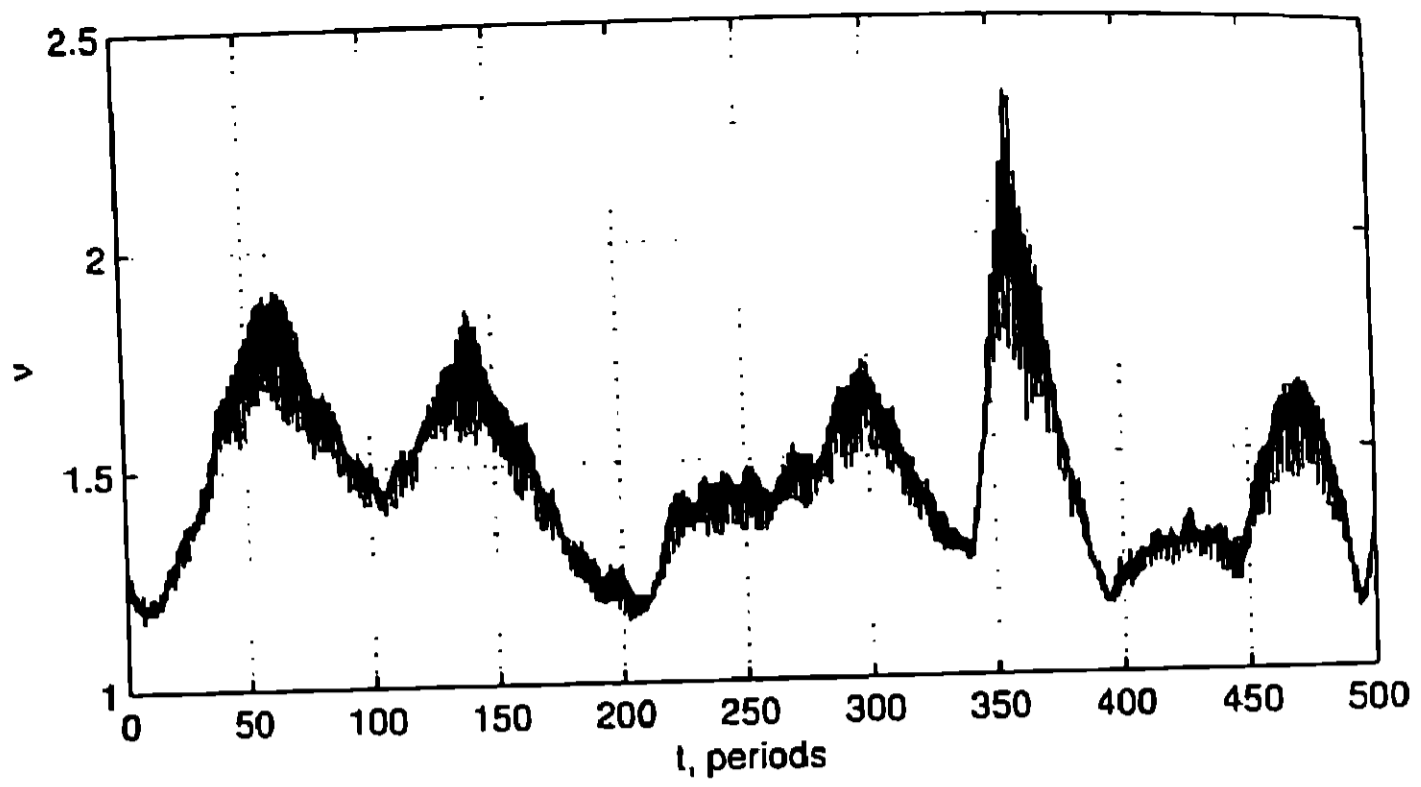


Рис. V.1. Значения функции $\nu(t)$

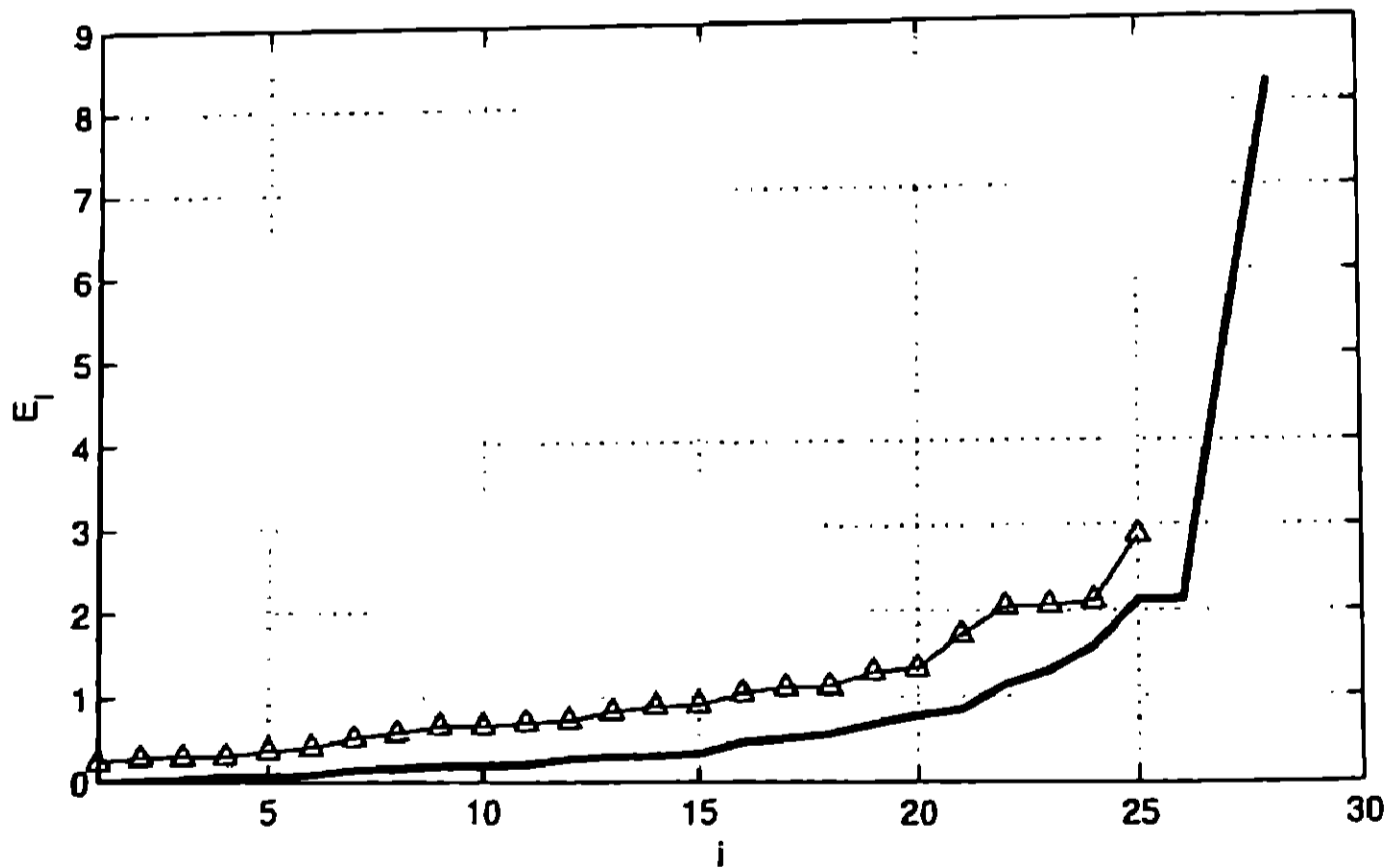


Рис. V.2. Концентрация энергии. Отмеченная треугольниками линия — в начальный момент, жирная линия — в момент образования волны-убийцы

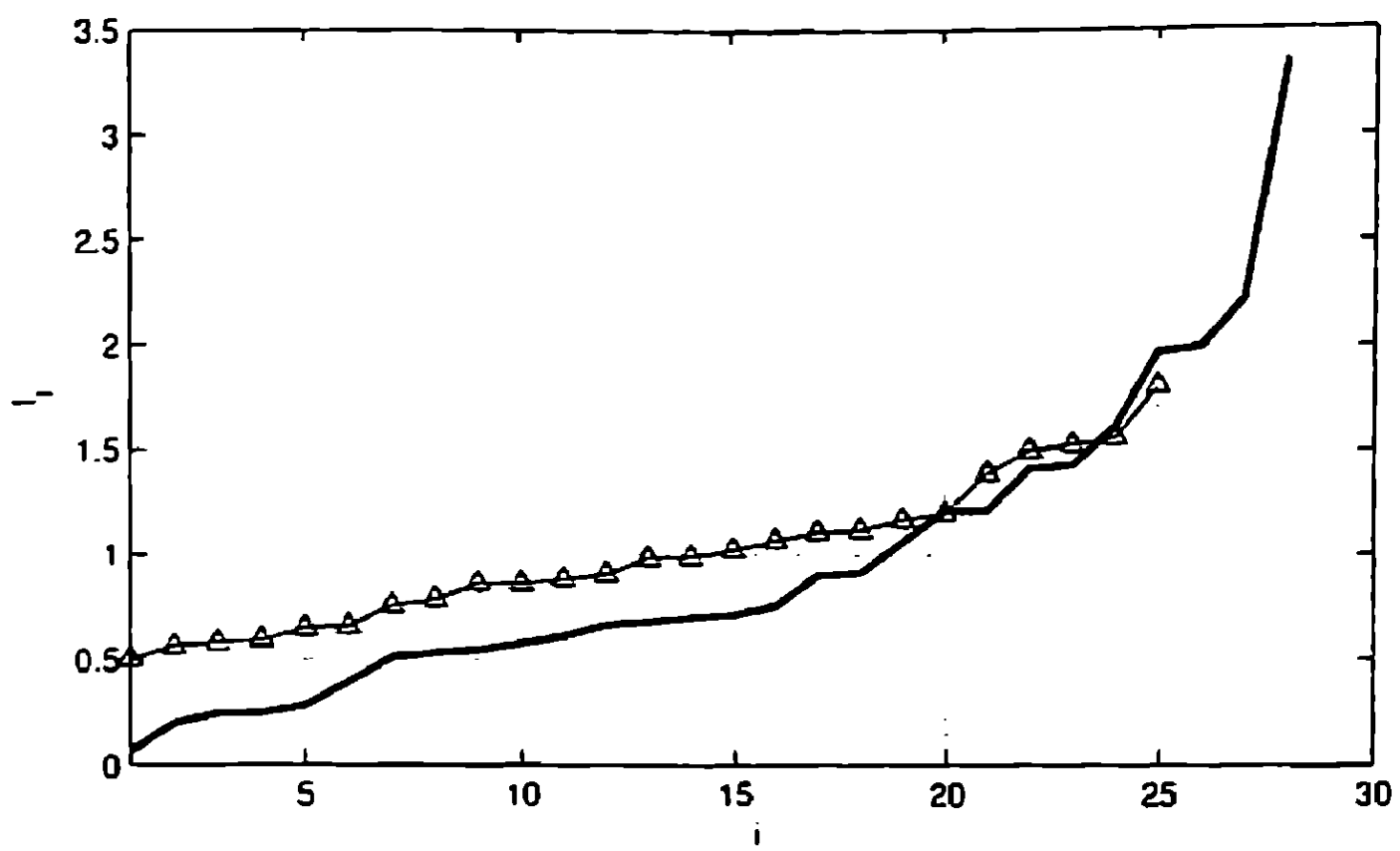


Рис. V.3. Концентрация модуля импульса. Отмеченная треугольниками линия — в начальном моменте, жирная линия — в момент образования волны-убийцы

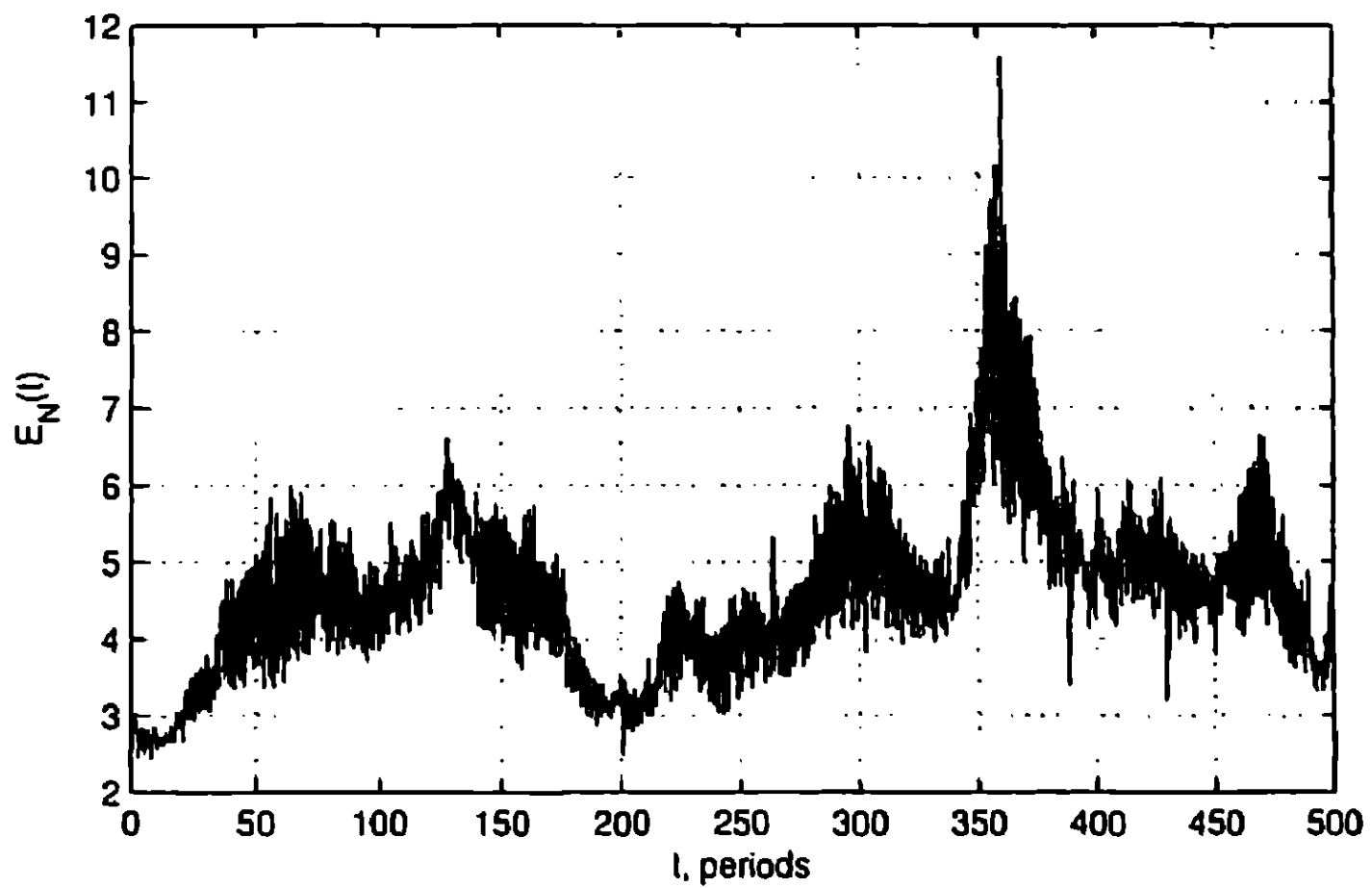


Рис. V.4. Динамика максимальных значений концентрации полной энергии

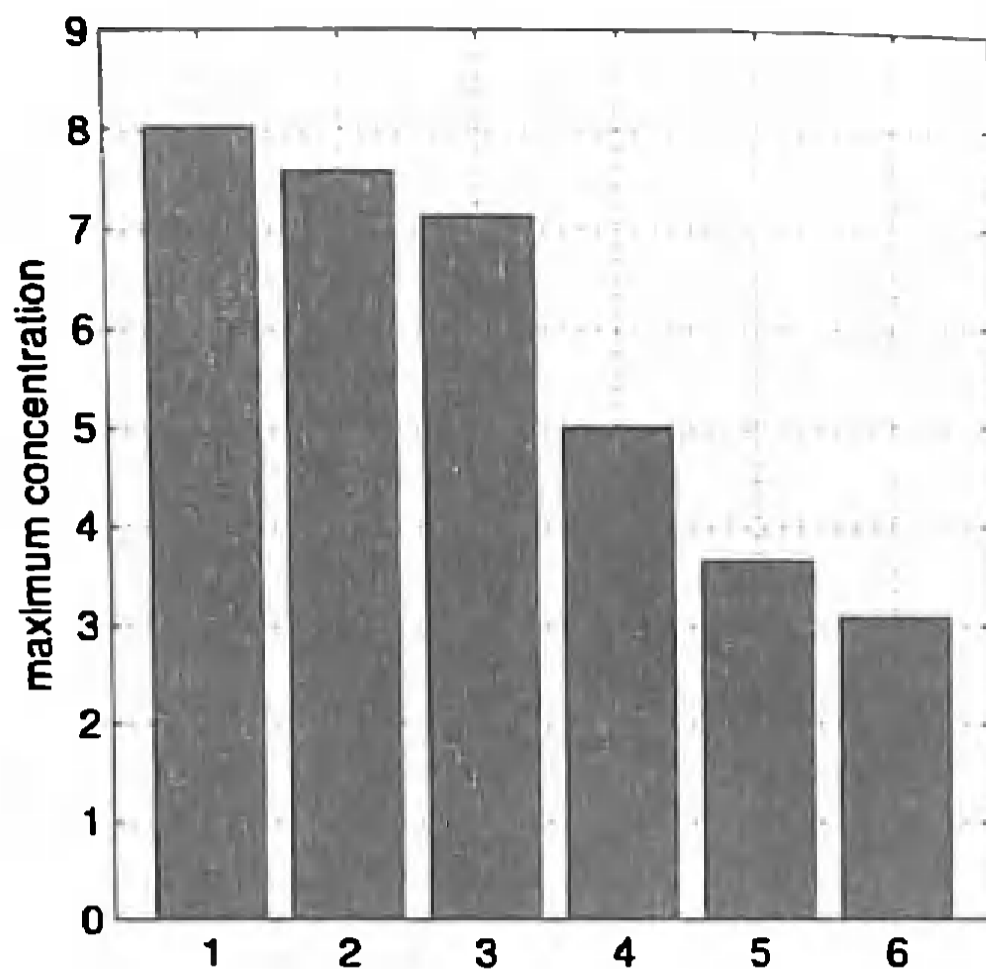


Рис. V.5. Средние значения максимальной концентрации. (1) – кинетическая энергия, (2) – полная энергия, (3) – потенциальная энергия, (4) – вертикальный импульс, (5) – горизонтальный импульс, (6) – модуль импульса

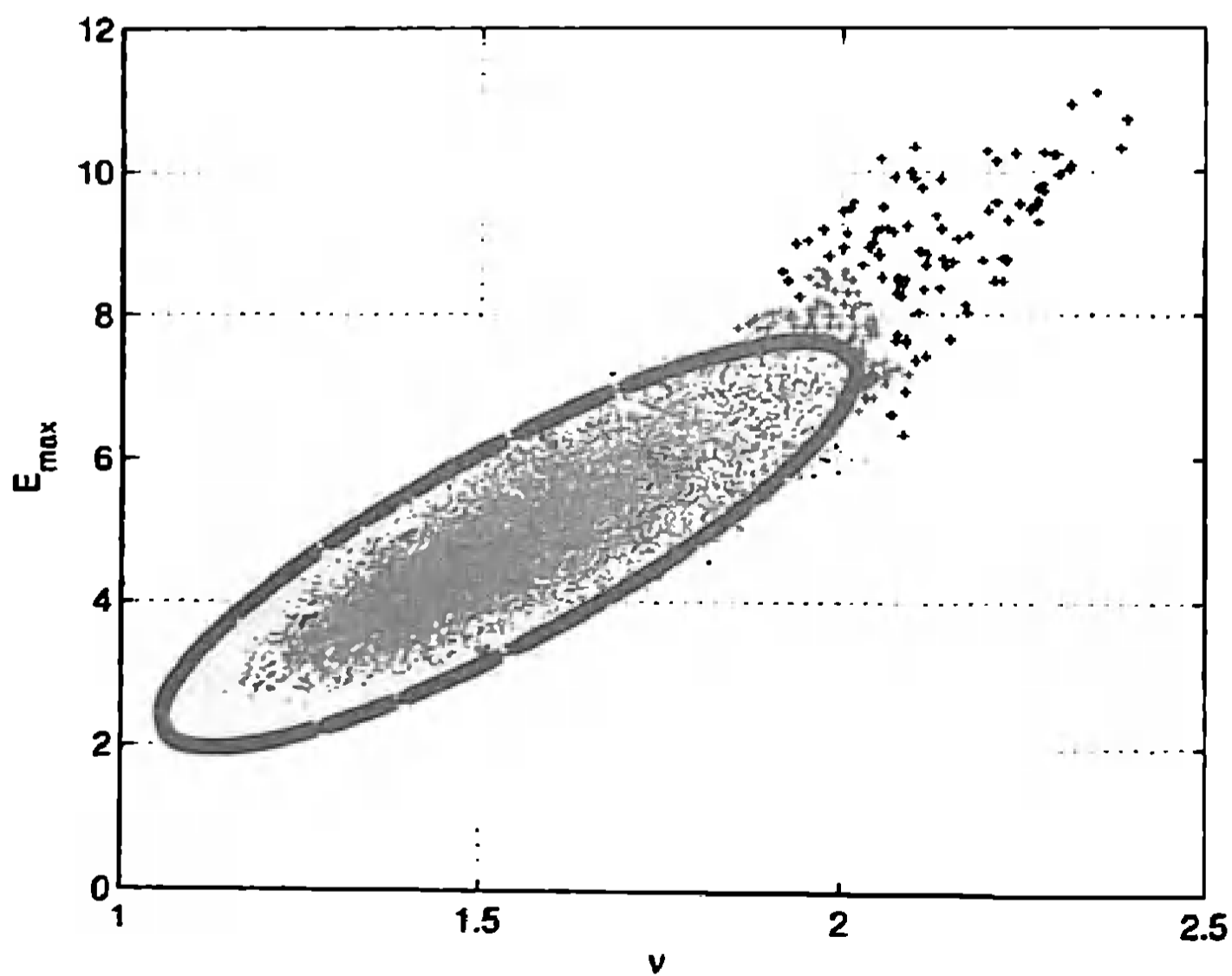


Рис. V.6. Диаграмма совместного распределения параметров $\nu_{max}(t)$ и $E_{max}(t)$

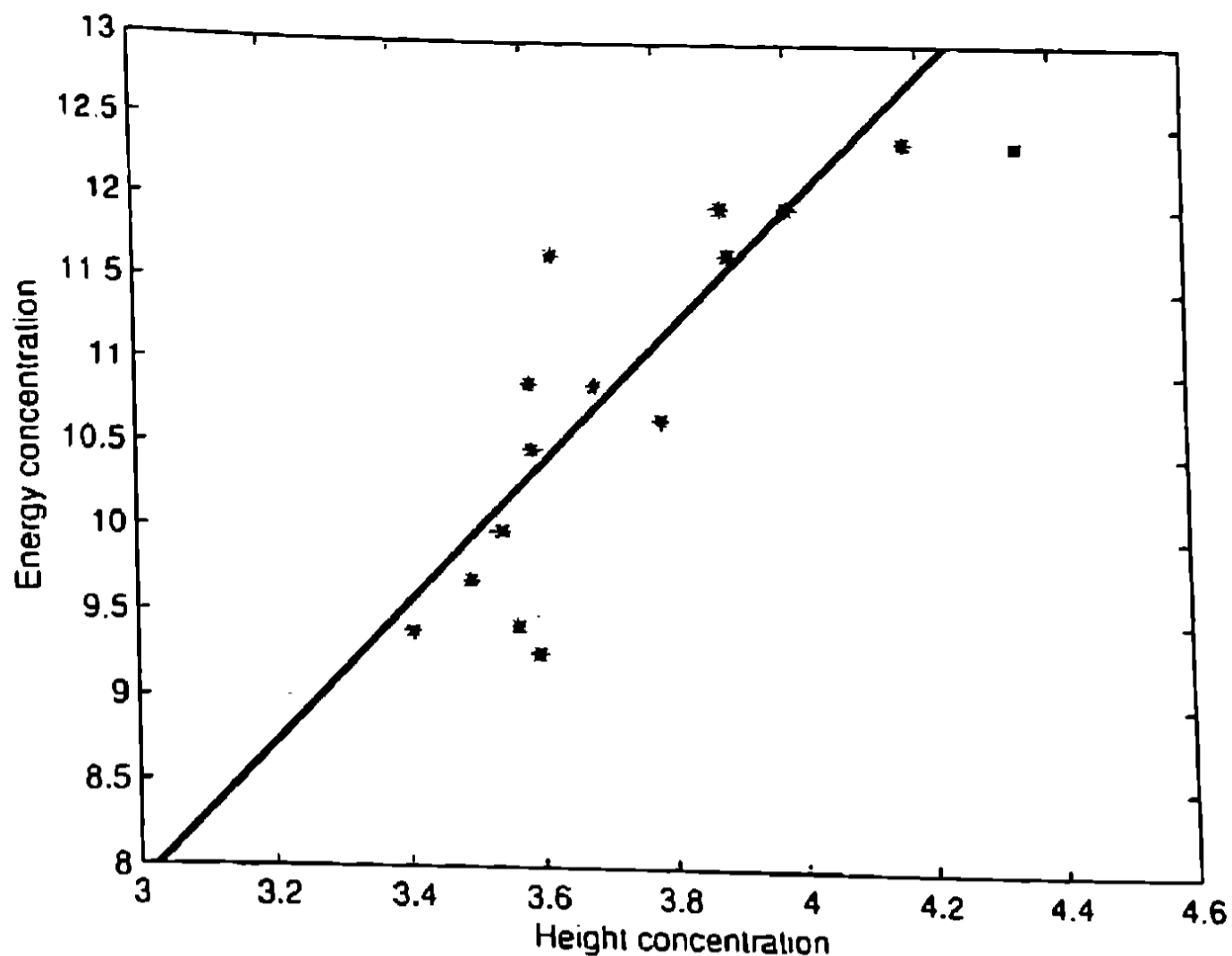


Рис. V.7. Регрессионная зависимость между значениями концентраций высоты и энергии волн-убийц

14. Типичные профили волн-убийц

14.1. «Стена воды», «дырка в море» и «три сестры»

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов по моделированию морского волнения на основе точных уравнений гидродинамики, в которых мы неоднократно наблюдали возникновение волн-убийц. Составив достаточно большой атлас профилей аномальных волн, включающий в себя порядка 3000 различных волн-убийц, было обнаружено, что большинство этих профилей имеют характерную геометрию, что позволило выделить характерные профили волн-убийц и построить трехпараметрическую регрессию этих профилей.

В вычислительных экспериментах наблюдалось три класса волн-убийц: «стена воды», «дырка в море» и «три сестры». Названия этим формам экстремальных волн были даны в свое время моряками, встречавшими волны-убийцы. Около 95% этих профилей имеют почти одинаковую геометрию и соответствуют первому классу — стена воды.

На диаграмме V.8 приведено распределение по частоте наблюдения различных классов волн-убийц.

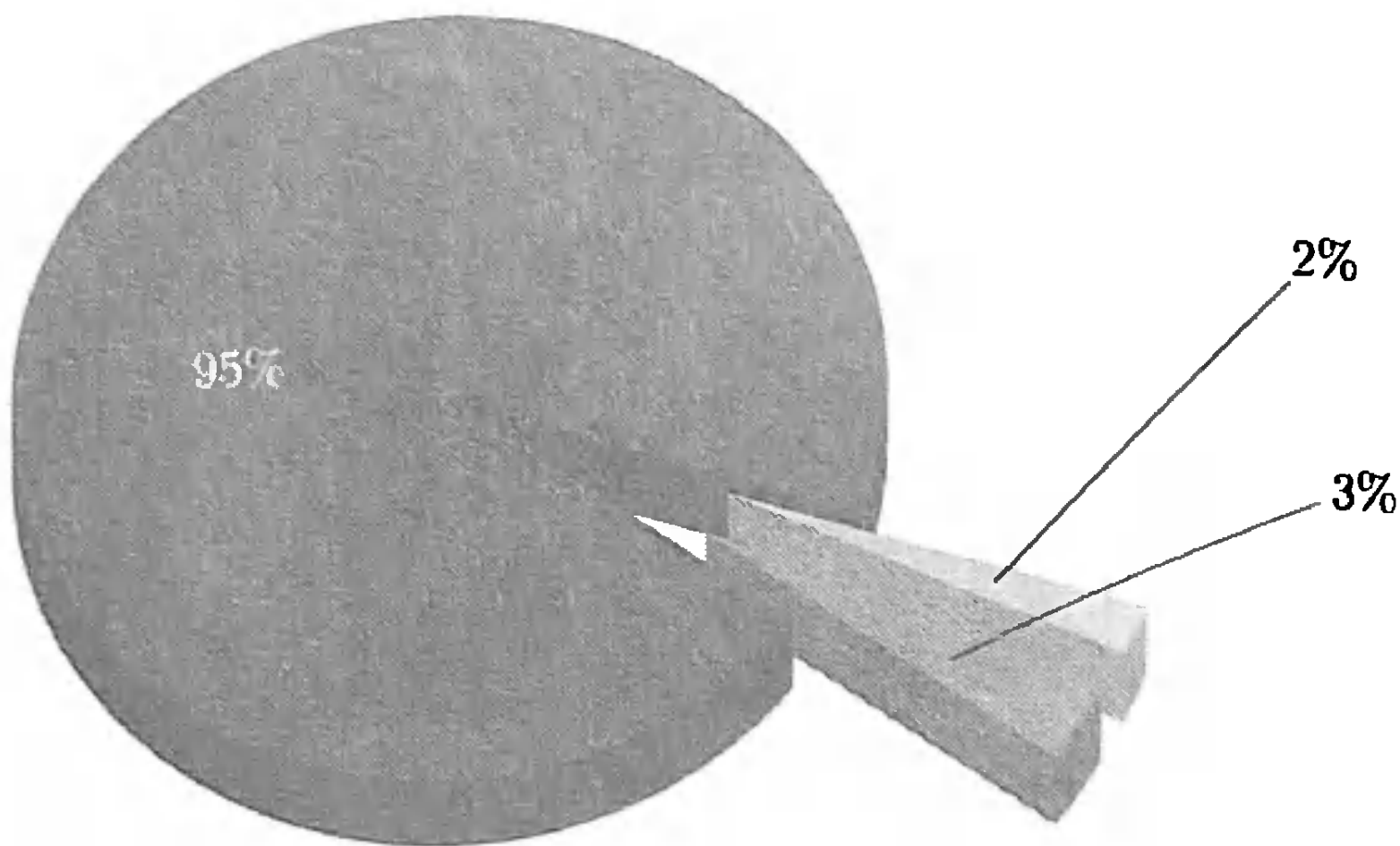


Рис. V.8. Соотношение типов волн-убийц: 95% — «стена воды»; 3% — «дырка в море»; 2% — «три сестры»

14.2. Сплайн-аппроксимация профиля волны-убийцы

Рассмотрим более внимательно профиль волны-убийцы, соответствующий наиболее часто встречающемуся классу. Найдем кубическую регрессию для левой и правой стороны волны в виде

$$P_{left/right}(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Без ограничения общности будем считать, что вершина имеет координаты $(0, 1)$, следовательно, имеем $a_0 = 1$. Для типичного профиля мы имеем следующие числовые значения

$$P_{left} = -0.0012x^3 + 0.0127x^2 + 0.3676x + 1,$$

$$P_{right} = 0.0028x^3 + 0.0063x^2 + 0.2756x + 1.$$

На рис. V.9 приведем график профиля и предложенной регрессии, а на рис. V.10 показана относительная точность нашей аппроксимации. Предложенная регрессия кубическими многочленами оказалась эффективной и для других профилей волн-убийц, которые наблюдались в проведенных нами экспериментах.

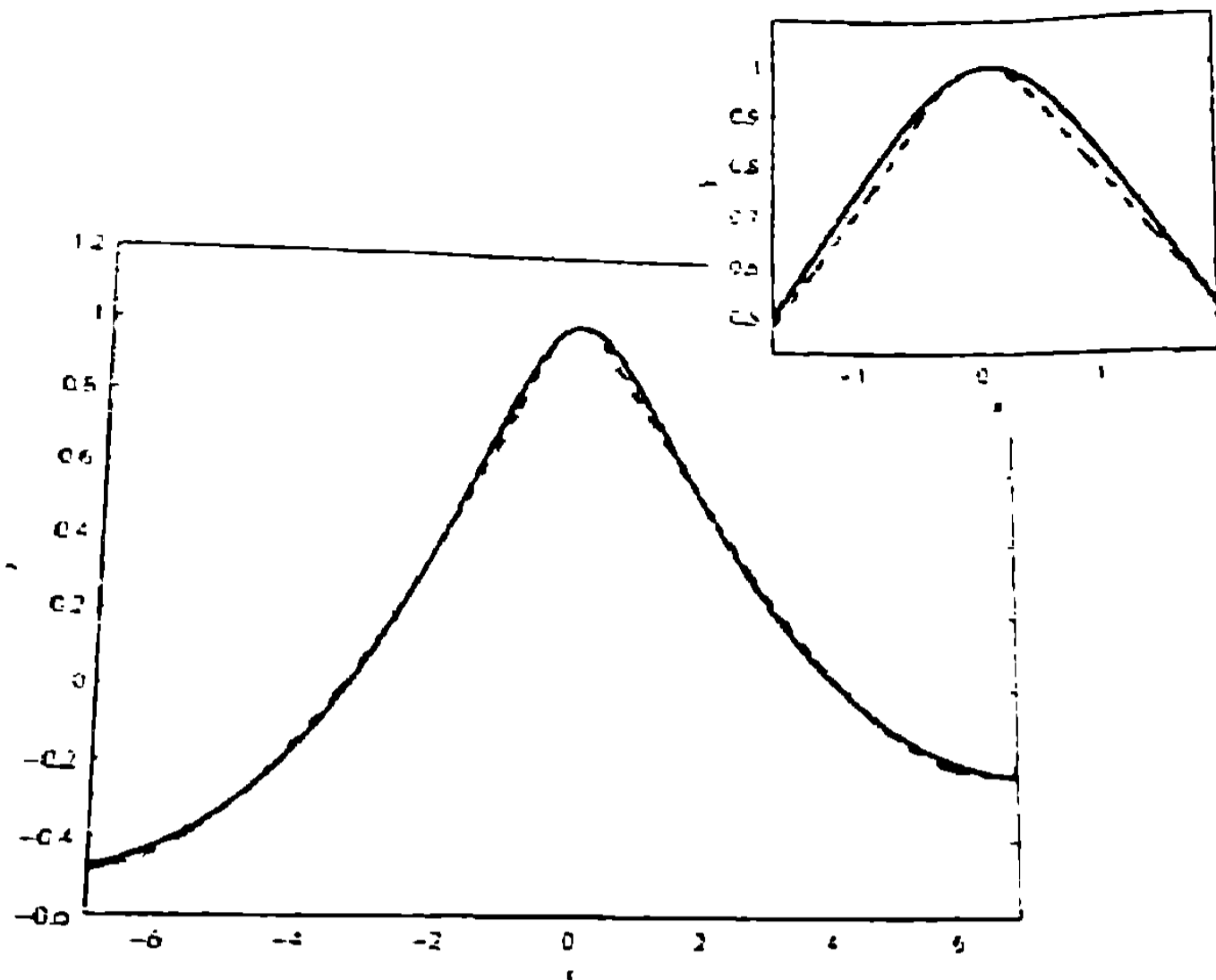


Рис. V.9. Аппроксимация профиля кубическим многочленом

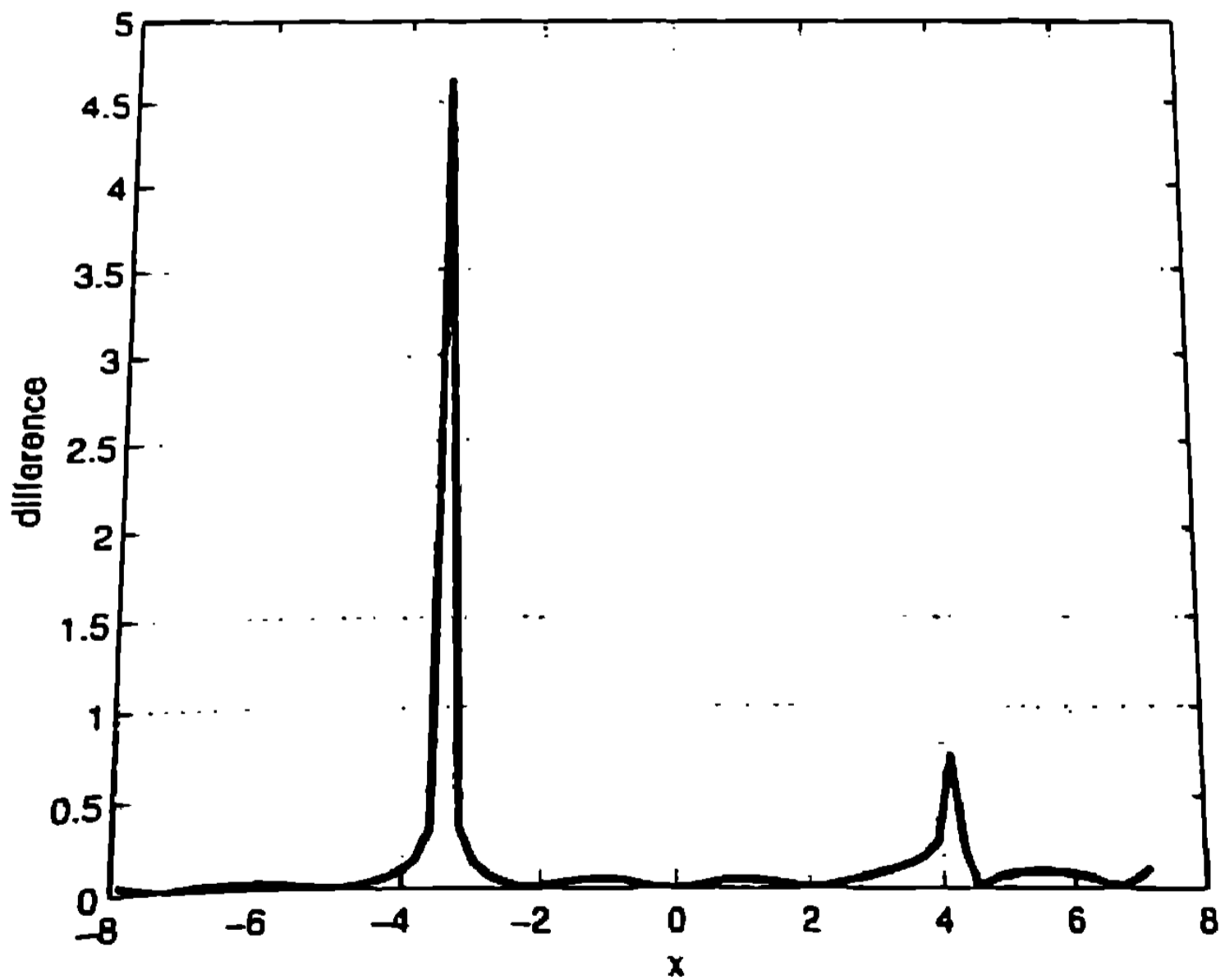


Рис. V.10. Относительная погрешность аппроксимации

14.3. Распределение параметров профилей волн-убийц

После построения аппроксимации аналитическими функциями можно анализировать различные геометрические характеристики экстремальных волн. В частности, около 95% профилей волн убийц имеют максимальную крутизну κ в пределах

$$\kappa \in [0.25, 0.6],$$

при этом среднее значение крутизны

$$\bar{\kappa} = 0.38.$$

На рис. V.11 приведена диаграмма распределения максимальных крутиз волн-убийц.

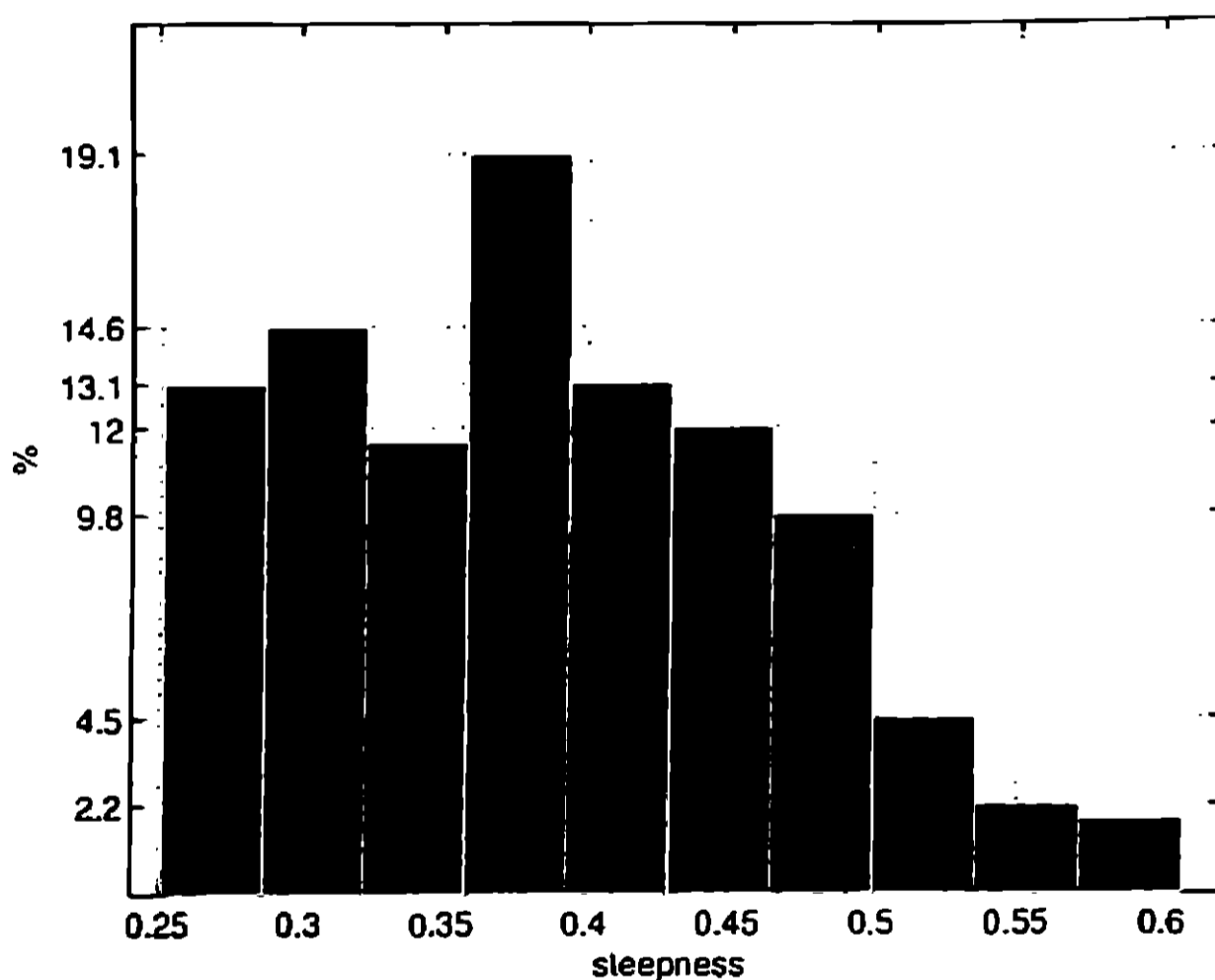


Рис. V.11. Распределение максимальных крутиз волн-убийц

Заметим, что наблюдаемые экстремальные волны со схожей формой тем не менее могут иметь широкий диапазон максимальной крутизны от умеренной, до сильно нелинейной. Это говорит о том, что не все волны, называемые волнами-убийцами представляют реальную опасность.

Однако представленные результаты могут быть использованы для построения типичных профилей волн-убийц и создания инженерных методик для оценки опасности таких волн для кораблей и морских сооружений.

Обнаружение и предсказание волн-убийц

В настоящей главе мы рассмотрим важный прикладной вопрос о возможности предсказания и обнаружения экстремальных волн в заданной точке. Предлагаемые методы будут апробированы на результатах вычислительных экспериментов, описанных выше.

15. Оперативный прогноз волн-убийц

Ранее мы рассматривали статистику волн-убийц, с помощью которой можно оценить вероятность возникновения этих волн по параметрам спектра волнения. Однако полученные таким путем оценки сложно применять для решения прикладных вопросов предсказания возникновения волн-убийц.

Рассмотрим вопрос об оперативном прогнозе волн-убийц по наблюдениям за динамикой морской поверхности. Все многообразие динамики свободной поверхности мы будем оценивать по поведению функций $\nu(t)$ и $\mu(t)$, которые, напомним, определяются следующим образом

$$\nu(t) = \frac{H_{max}(t)}{H_s(t)},$$

$$\mu(t) = \max_{x \in [0, 2\pi]} |\eta_x(x, t)|,$$

где, $H_{max}(t)$ — высота самой максимальной волны в рассматриваемом районе в момент t , $H_s(t)$ есть значительная высота волнения, η_x — производная свободной поверхности.

Опасную волну-убийцу мы будем определять, как одновременное выполнение двух условий

$$\nu(t) > 2.1$$

и

$$\mu(t) > 0.3.$$

По наблюдениям этих функций построим метод оперативного предсказания возникновения волн-убийц. Нами был разработан алгоритм SPRW (Simple Predictor of Rogue Waves), который заключается в следующей схеме. Сигнал о предсказании возникновения волны-убийцы выдается в случае, когда одновременно выполнены следующие условия

$$\frac{\nu(t + \Delta) - \nu(t)}{\Delta} \geq \alpha,$$

$$\frac{\mu(t + \Delta) - \mu(t)}{\Delta} \geq \beta,$$

где $\Delta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ суть параметры алгоритма

На основе анализа большого банка данных вычислительных экспериментов наилучший выбор параметров алгоритма SPRW показал точность предсказания равную 68.95% с учетом ошибок первого и второго рода. Под ошибками первого рода понимается несрабатывания критерия при возникшей волне-убийце, а ошибки второго рода, наоборот, есть ложное срабатывание критерия.

На рис. VI.1 приведен рабочий экран программы реализации алгоритма SPRW.

На этом рисунке верхний график — это значения функции $\nu(t)$, а нижний — значения функции $\mu(t)$. Горизонтальные линии — это критические линии:

$$\nu = 2.1$$

$$\mu = 0.3$$

одновременное пересечение, которых означает факт возникновения волны-убийцы в вычислительном эксперименте. Широкая вертикальная линия — это момент времени, в течение которого был выдан сигнал о предсказании волны-убийцы. Типичная ситуация, когда сигнал выдается в непосредственный момент перед возникновением волны-убийцы, что следует из самого алгоритма SPRW. Из опыта применения алгоритма SPRW, построенного на анализе поведения функций $\nu(t)$, $\mu(t)$, можно сделать вывод о стохастичности поведения индикаторных функций и, соответственно, появлению волн-убийц в ходе нелинейной динамики поверхностных волн на воде. Этот вывод во многом совпадает с выводами в других работах об отсутствии четких предикторов волн-убийц.

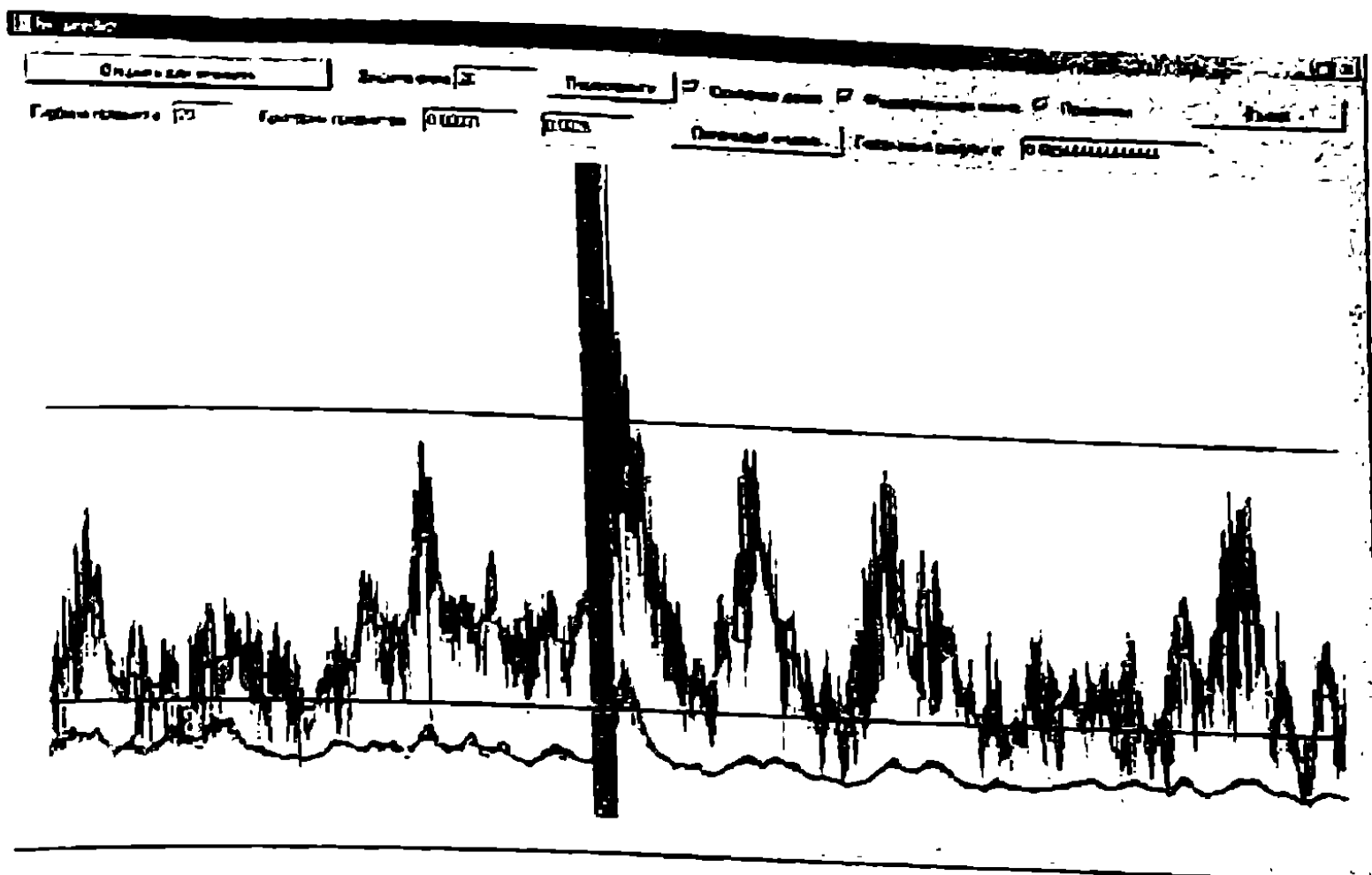


Рис. VI.1. Рабочий экран программы SPRW

16. Возможности дистанционного обнаружения волн-убийц

Очень важным является вопрос о возможности дистанционного обнаружения волн-убийц. Сейчас мы смоделируем ситуацию, когда оперативное наблюдение за волнением ведется с помощью идеального точечного дальномера, расположенного, например, на корабле или неподвижной платформе. Основной вопрос состоит в том, каким образом можно обнаружить появление волн-убийц по показаниям данного «прибора».

Итак, пусть на высоте $H > 0$ установлен неподвижный «прибор», который дает показания о расстоянии от прибора до поверхности волны по лучу исходящему от прибора под фиксированным углом $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ от оси абсцисс. Описанную схему проиллюстрируем на рис. VI.2.

Пусть в фиксированный момент времени t мы имеем показание равное R_t , тогда возвышение поверхности в точке пересечения с лучом над нулевым уровнем y_t выразится по формуле

$$y_t = H - R_t \sin \alpha$$

В дальнейшем удобнее работать с величинами y_t . Будем рассматривать записи вычислительных экспериментов, в которых возникают волны-убийцы. Типичный пример записи показаний прибора приведен на рис. VI.3.

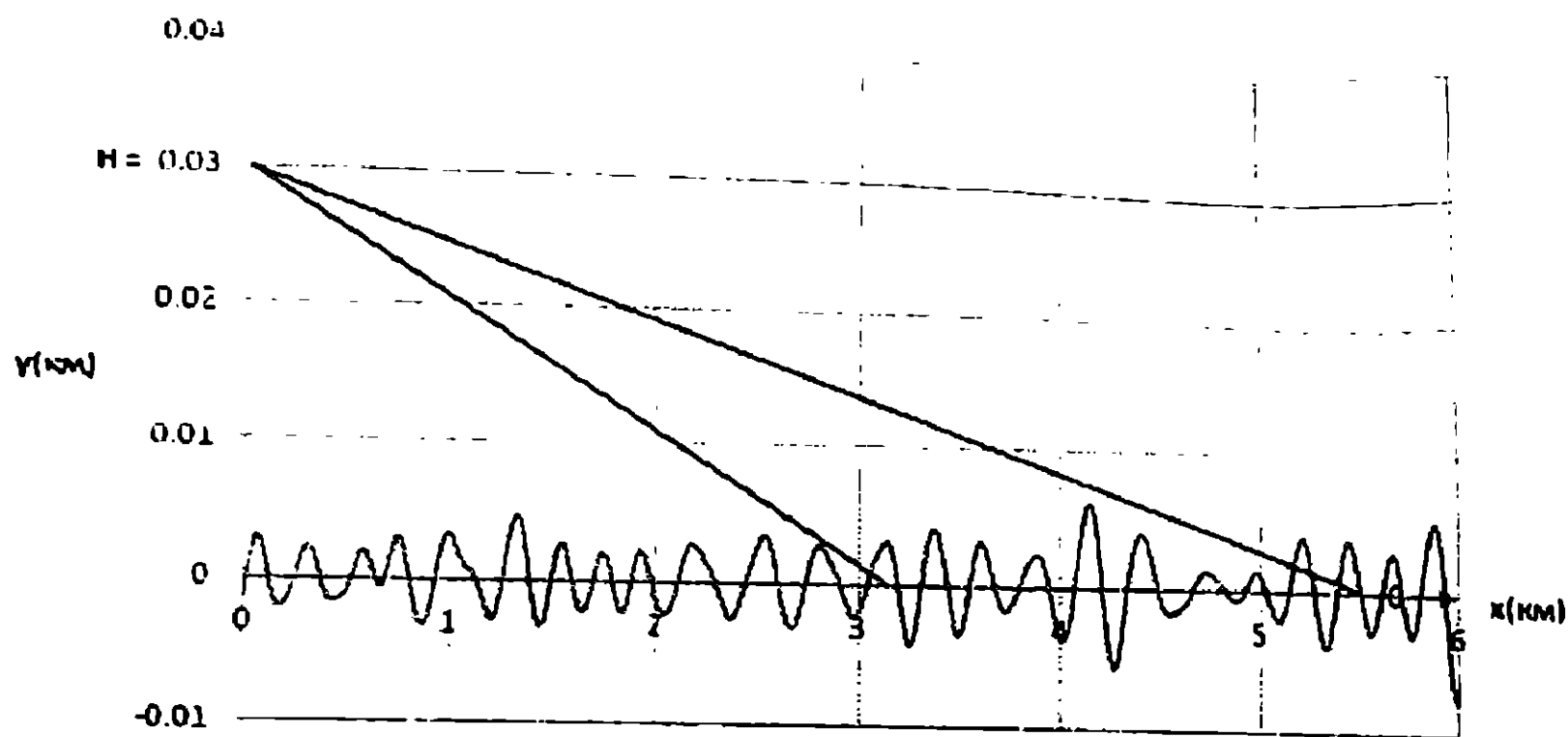


Рис. VI.2. Схема установки прибора

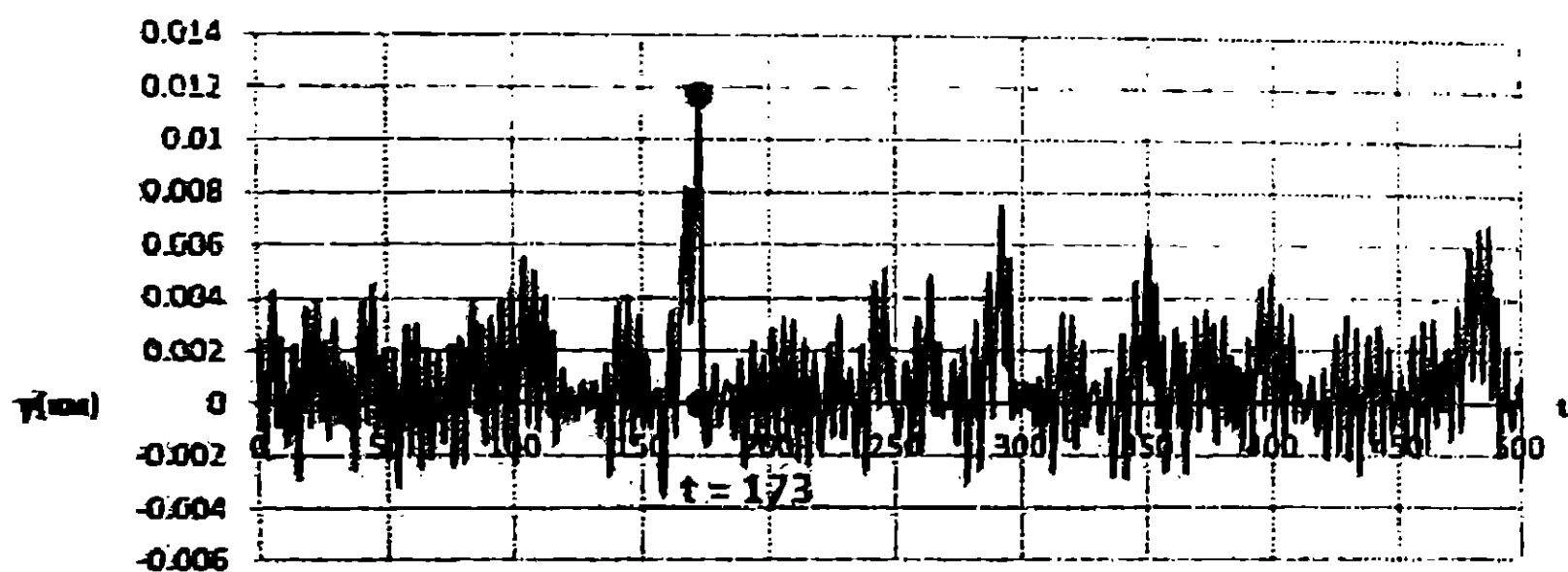


Рис. VI.3. Показания «прибора» при обнаружении волны-убийцы

На этом рисунке мы можем определить момент возникновения волны-убийцы по резкому возрастанию графика y_t . Для реализации автоматического метода обнаружения волны-убийцы мы будем работать не с функцией y_t , а с функцией квадрата среднего отклонения этой функции от своего среднего значения. Будем считать, что наш прибор дает показания в дискретные моменты времени

$$t_n = (\Delta t)n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Введем следующие величины

$$\bar{y}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N y_{t_n},$$

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^N (y_{L_n} - \bar{y}_N)^2,$$

где N — количество обрабатываемых отсчетов. Анализируя изменения величины σ_N^2 при увеличении N можно обнаружить возникновение волны-убийцы. Приведем график (на рис. VI.4) этой величины для рассматриваемого вычислительного эксперимента.

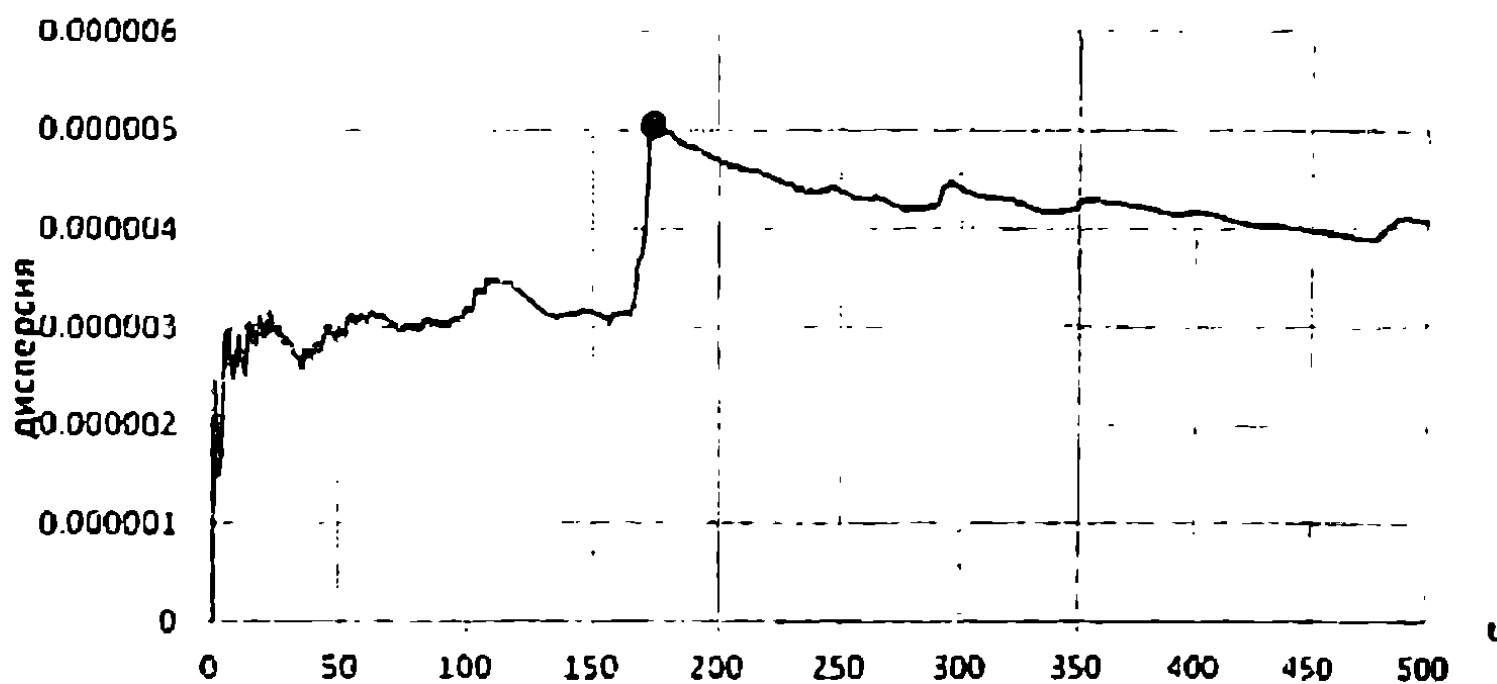


Рис. VI.4. График величины σ_N^2

Для обнаружения возникновения волны-убийцы по графику величины необходимо определять моменты резкого возрастания этой величины. С этой целью будем анализировать поведение конечных разностей величины σ_N^2

$$d_{N,\tau} = \sigma_N^2 - \sigma_{N-\tau}^2$$

График величины $d_{N,\tau}$ приведен на рис. VI.5

Горизонтальной линией на этом рисунке обозначено критическое значение величины $d_{N,\tau}$, при достижении которого происходит регистрация волны-убийцы. При этом следует рассматривать эту индикаторную функцию, после первых 50 отсчетов.

Уровень критической линии устанавливается эмпирически. Проведенные нами вычислительные эксперименты по обнаружению волны-убийцы показали свою состоятельность, позволяя обнаруживать волну-убийцу на расстоянии 4-6 км от регистрирующего прибора.

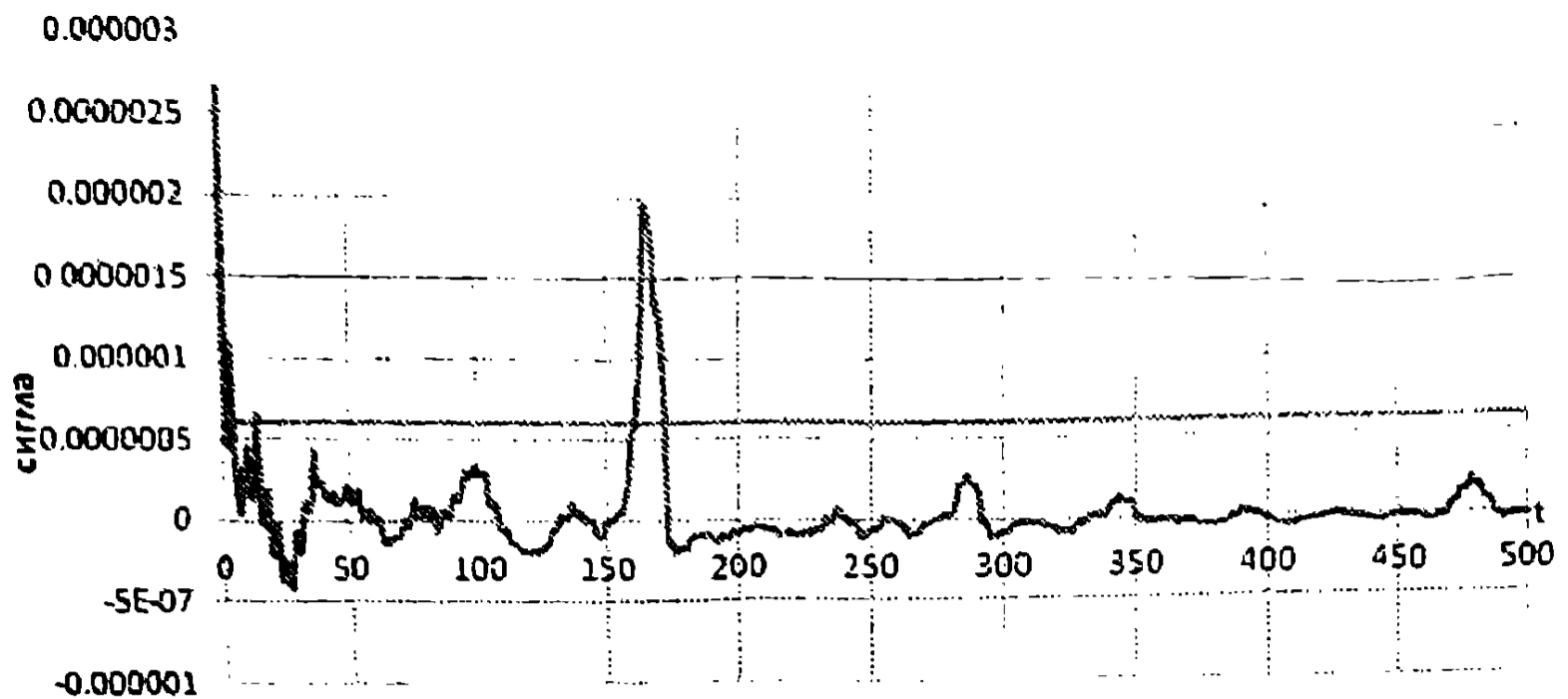


Рис. VI.5. График величины $d_{N,\tau}$, $\tau = 10$

17. Вопросы обнаружения волн-убийц с помощью волнограмм

Между большинством натуральных экспериментов, проводимых с целью изучения волн-убийц, и нашими вычислительными экспериментами существует принципиальная разница. И дело не в различной точности или адекватности уравнений гидродинамики реальному морскому волнению.

Как правило, натурные эксперименты основаны на наблюдении за возвышением морской поверхности в одной точке. Такая запись, называемая волнограммой, представляет собой функцию времени. Если частота записи сигналов достаточно высокая, то с помощью волнограммы можно наблюдать геометрические характеристики, проходящих над датчиком волн. Результаты вычислительных экспериментов позволяют оперировать динамикой всей рассматриваемой поверхности. При этом нам доступна не только геометрия волн, но и поле скоростей жидкости. Конечно, в наших экспериментах мы рассматриваем периодические условия, но вычислительные возможности позволяют рассматривать большие пространственные области. Кроме того, дискретность записи результатов вычислительных экспериментов, определяемая дискретизацией при численном решении дифференциальных уравнений, является очень большой, что позволяет рассматривать практически непрерывное изменение поверхности.

Указанное различие является весьма существенным и может приводить к разночтению между данными о вероятности волн-убийц в вычислительных экспериментах с частотой появления этих волн в на-

турных измерениях. Покажем каким образом можно объяснить это несоответствие.

В вычислительных экспериментах мы наблюдаем динамику свободной поверхности — функцию $y = y(x, t)$. На основании этой функции, используя амплитудный критерий, можно обнаруживать экстремальные волны. И, в тоже время, по этой функции построим функцию — волнограмму, получаемую, например, с помощью донного датчика

$$A_s(t) = y(x_0, t).$$

Здесь точка x_0 есть место, в котором установлен датчик возвышения поверхности. Примерная схема описываемой эмуляции натуральных экспериментов приведена на рис. VI.6, где через S обозначен донный датчик.

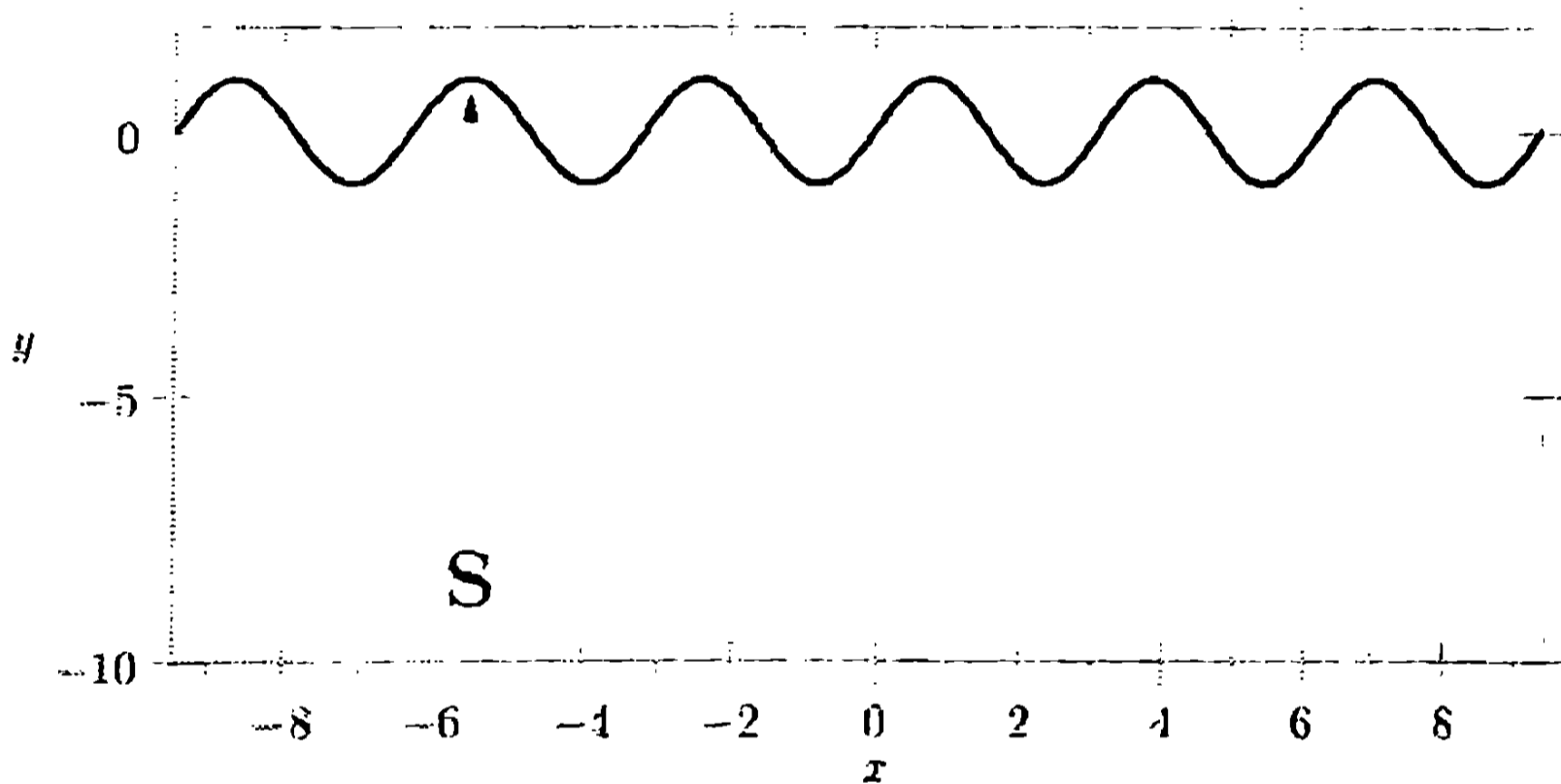


Рис. VI.6. Схема эмуляции натуральных экспериментов

Для сравнения возможностей натуральных экспериментов с вычислительными используется следующая методика.

1. Проводится большая серия вычислительных экспериментов с различными параметрами начальных волн.
2. В результатах вычислительных экспериментов обнаруживаются волны-убийцы.
3. По полным записям результатов строятся волнограммы — функции $A_s(t)$.
4. По функциям $A_s(t)$ обнаруживаются волны-убийцы согласно правилам обработки натуральных данных.

5. Вычисляется процент совпадения обнаружения волны-убийцы в результате обработки вычислительных экспериментов и обработки волнограмм.

Данная методика была проверена на серии вычислительных следующих экспериментов. Всего было проведено 1056 элементарных экспериментов. Квадрат средней крутизны принимал значения

$$\mu^2 \in \{2.06 \times 10^{-3}; 3.08 \times 10^{-3}; 4.10 \times 10^{-3}\}.$$

дисперсия

$$D \in \{0.07; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21\}$$

Для каждого фиксированного значения квадрата средней крутизны и дисперсии проводилось по 32 однотипных численных опыта.

Далее по полным записям результатов вычислительных экспериментов были построены волнограммы, которые затем были проанализированы на предмет обнаружения волн-убийц согласно правилам обработки данных натуральных. Для каждого значения квадрата средней крутизны и спектральной ширины процент совпадения обнаружения волны-убийцы в результате обработки вычислительных экспериментов и в результате обработки волнограмм представлен на рис. VI.7.

Значения по оси абсцисс соответствуют 11 значениям спектральной ширины, а значения по оси ординат — проценту совпадений обнаружения волны-убийцы в результате обработки вычислительных экспериментов и в результате обработки волнограмм.

Мы видим, что вероятность обнаружения волн-убийц по волнограмме оказывается равной 2–6% в случае наших опытов. При этом использовалась непрерывная запись волнограммы. В реальных экспериментах, как правило, датчики работают с определенной частотой, которая может весьма существенно изменить возможность обнаружения волн-убийц. Сравним теперь результаты обнаружения волн-убийц в вычислительных экспериментах и по прореженным волнограммам см. рис. VI.8.

Мы видим, что вероятность обнаружения волн-убийц по прореженным волнограммам редко превышает 1%.

Разумеется, что конкретные цифры будут меняться в зависимости от ширины пространственной области, в которой мы рассматриваем распространение волн, но примерное представление о разнице между натурными измерениями и вычислительными экспериментами нужно иметь в виду.

Для наглядности на рисунке VI.9 мы приводим пространственно-временную запись волны-убийцы в одном вычислительном эксперименте. На этой записи хорошо видно, что пик волны-убийцы движется с определенной скоростью.

Отметим, что Специальным конструкторским бюро автоматизации морских явлений ДВО РАН и Институтом морской геологии и геофизики ДВО РАН, начиная с 2009 г., проводятся серии натурных экспериментов на мысах залива Анива на о. Сахалин. Измерения осуществляются с помощью автономных донных регистраторов гидростатического давления, изготовленных в КБ г. Углич. Описание прибора и проводимых экспериментов можно найти в работе [12]. При их проведении было обнаружено возникновение волн-убийц. Однако частота их появления оказывалась значительно меньшей, чем это предсказывается теорией. Одним из объяснений такого расхождения является тот факт, что в данных экспериментах волны-убийцы обнаруживались по волнограммам. Как было показано выше, при этом удастся распознать лишь небольшую часть волн-убийц.

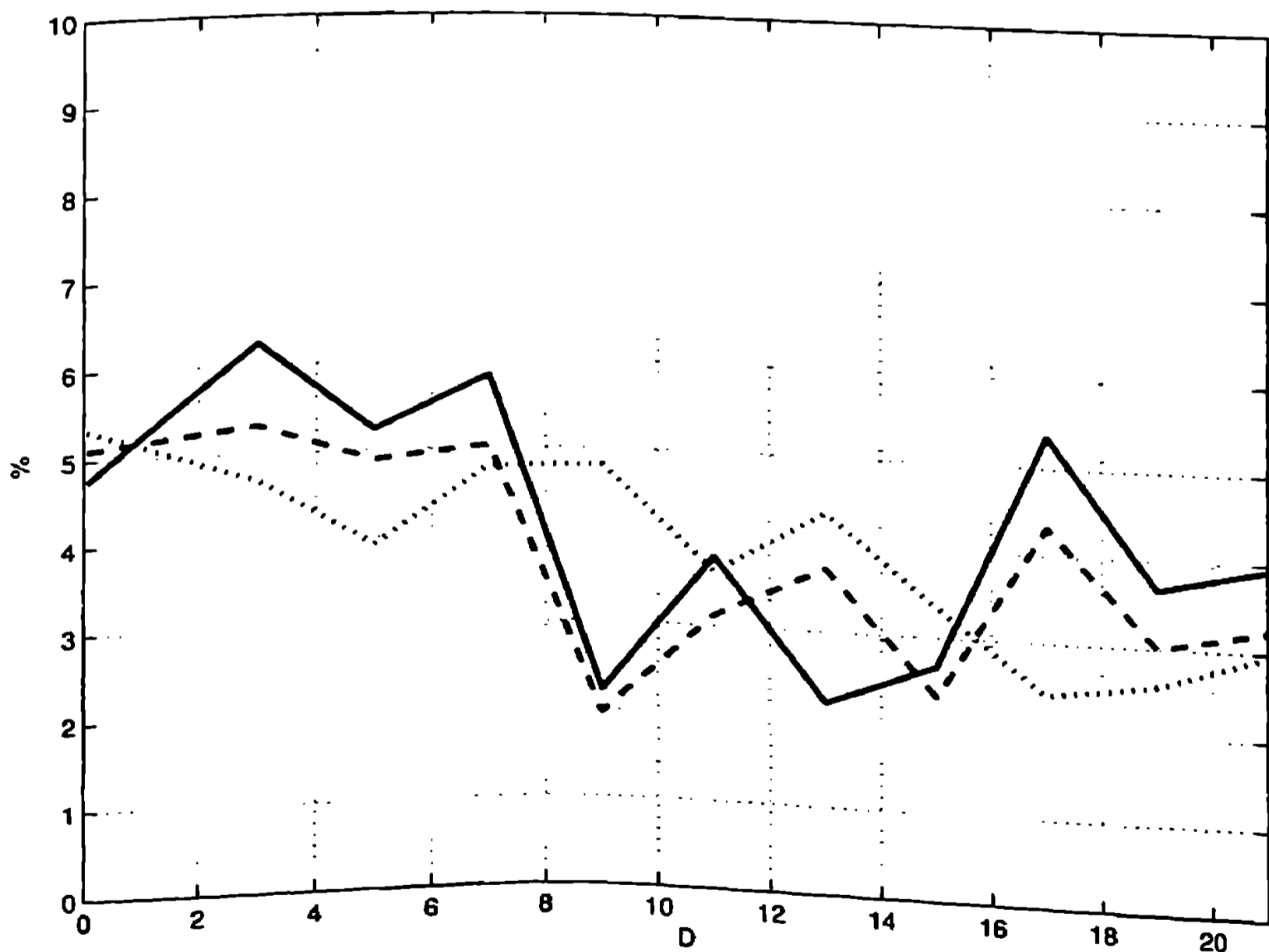


Рис. VI.7. Процент совпадения обнаружения волны-убийцы в результате обработки вычислительных экспериментов и в результате обработки волнограмм.

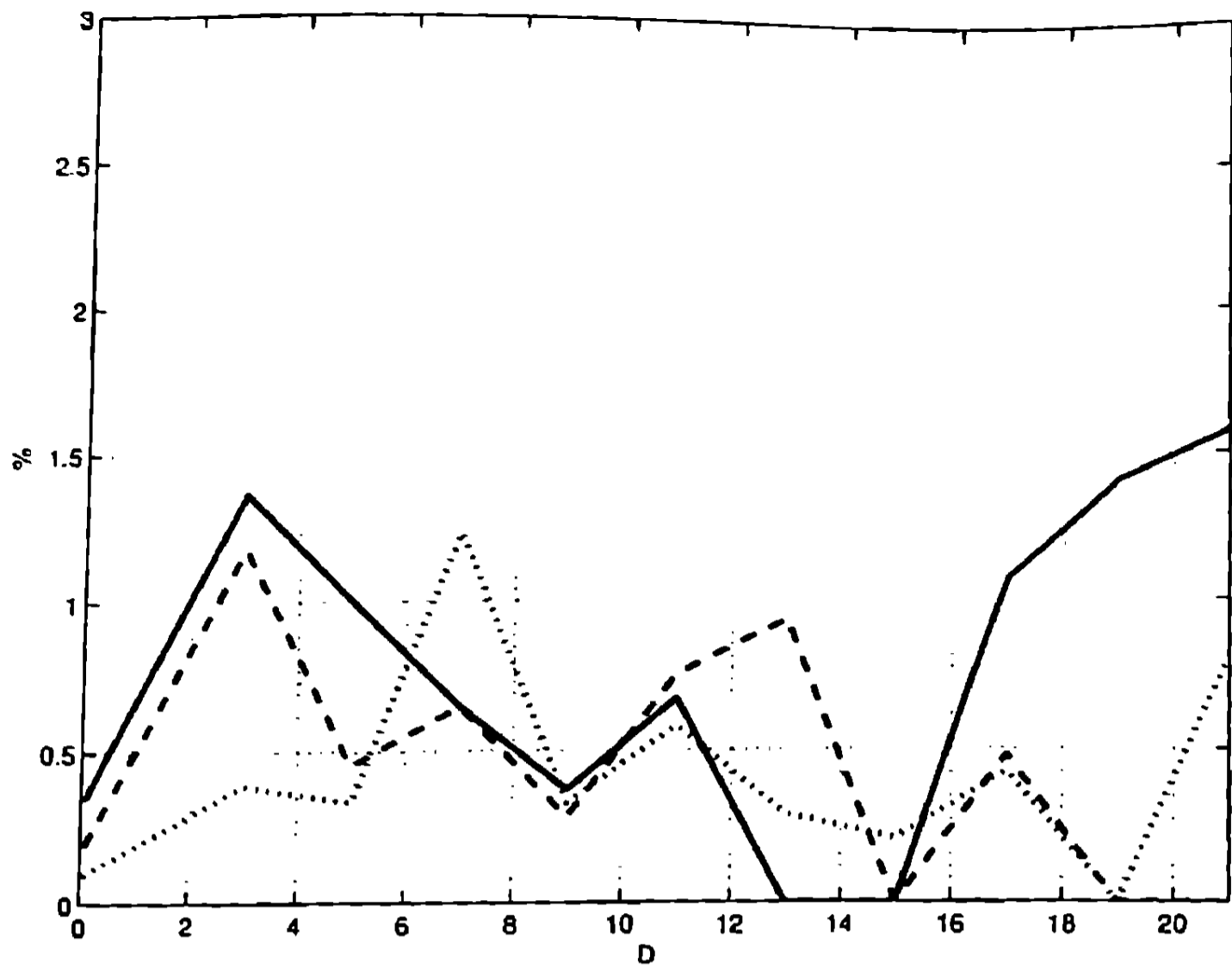


Рис. VI.8. Процент совпадения обнаружения волны-убийцы в случае прореженных данных.

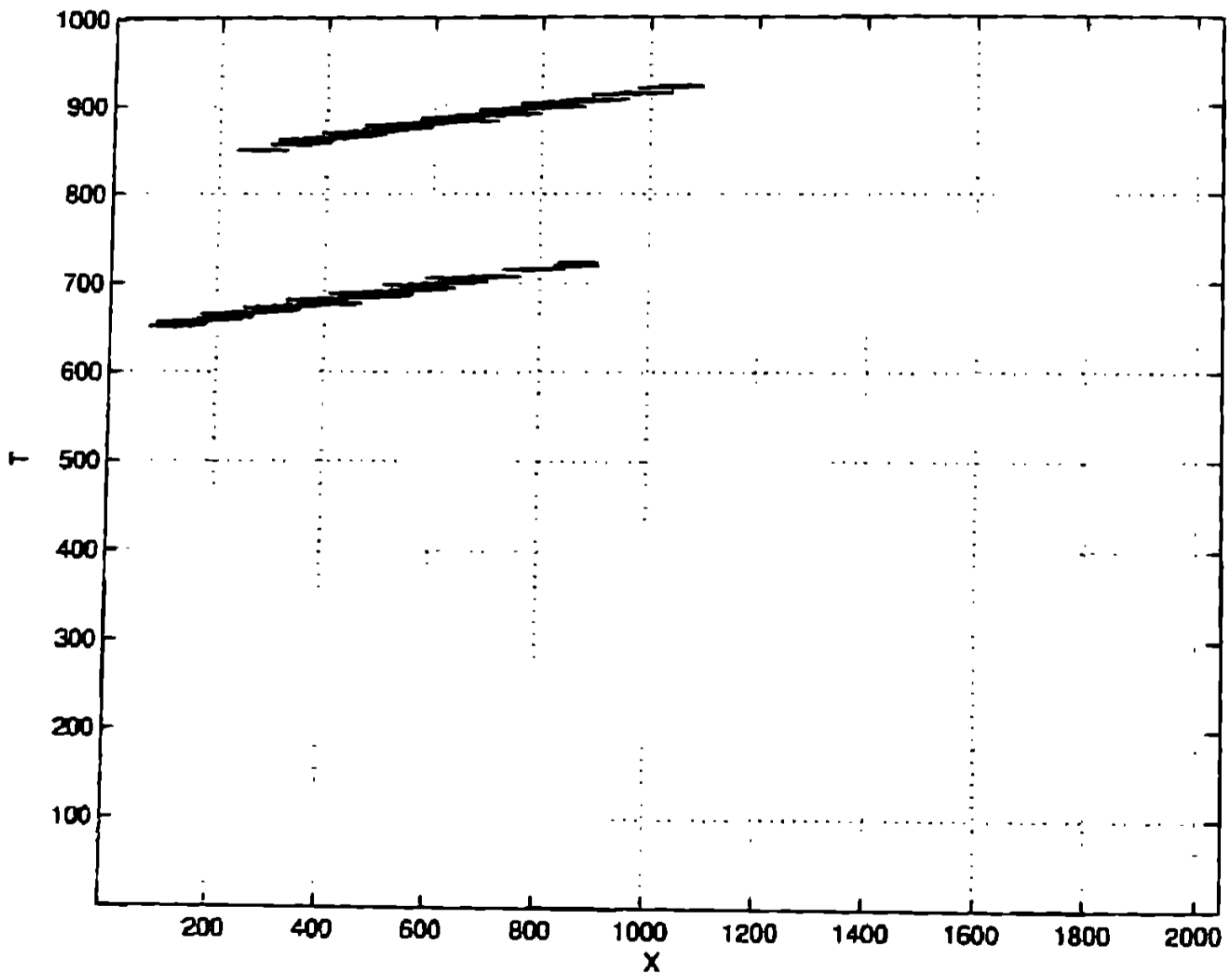


Рис. VI.9. Пространственно-временные следы волн-убийц.

Часть II

Математические вопросы

Уравнения, описывающие волны на воде

18. Основные уравнения

18.1. Функциональные пространства

Введем некоторые определения функциональных пространств, в которых будем рассматривать уравнения. Пусть X произвольное банахово пространство. Для любого $0 < T < \infty$ мы введем банахово пространство непрерывных на $[0, T]$ функций со значениями в пространстве X . Это пространство мы будем обозначать $C([0, T]; X)$. норма в этом пространстве вводится по формуле

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Через $C^k([0, T]; X)$, $k > 0$ мы будем обозначать банахово пространство непрерывно дифференцируемых вплоть до k -го порядка функций, заданных на $[0, T]$, со значениями в пространстве X . Норма в этих пространствах вводится по формуле

$$\|u\|_{C^k([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|u^{(k)}(t)\|_X.$$

Условимся обозначать $C^0([0, T]; X) = C([0, T]; X)$.

Для $1 \leq p < \infty$ введем банаховы пространства $L_p(0, T; X)$ как пространства измеримых на $(0, T)$ функций со значениями в пространстве

X и интегрируемых на $[0, T]$ в степени p . Норма в этих пространствах вводится по стандартной формуле

$$\|u\|_{L_p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p}.$$

Также будем использовать пространство $L_\infty(0, T; X)$, состоящее из измеримых на $(0, T)$ функций со значениями в пространстве X таких, что конечна норма

$$\|u\|_{L_\infty(0, T; X)} = \text{vtaisup}_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X,$$

то есть равная нижней грани всех констант C , для которых множество $\{t \in [0, T] : \|u(t)\|_X > C\}$ имеет лебегову меру нуль.

Пусть теперь H — гильбертово пространство. Будем рассматривать пространство $L_2(0, T; H)$ как гильбертово со скалярным произведением

$$(u, v)_{L_2(0, T; H)} = \int_0^T (u(t), v(t))_H dt.$$

Будем также рассматривать пространство $W_\infty^1(0, T; X)$ абсолютно непрерывных функций со значениями в X , имеющих первую производную из $L_\infty(0, T; X)$ с нормой

$$\|u\|_{W_\infty^1(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X + \text{vtaisup}_{t \in [0, T]} \|u'(t)\|_X.$$

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q , удовлетворяющей условию Липшица. Мы будем обозначать через $W_p^k(Q)$, $1 \leq p < \infty$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k -го порядка из $L_2(Q)$, с нормой

$$\|u\|_{W_p^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q |D^\alpha u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Через $\dot{W}_2^k(Q)$ обозначим замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $\dot{C}^\infty(Q)$ в $W_2^k(Q)$, а через $W_2^{-k}(Q)$ обозначим пространство, сопряженное к $\dot{W}_2^k(Q)$.

19. Корректность математической модели

19.1. Шкала гильбертовых пространств

Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $q > 0$ – произвольные числа. Рассмотрим подмножество комплексной плоскости:

$$\Omega_s^q = \{w = u + iv : |v - s| < q, 0 < u < 2\pi\}.$$

Введем шкалу функциональных пространств E_s^q , $s \in \mathbb{R}$, $q > 0$ как пополнение функций вида:

$$A(w) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{-ikw},$$

где $w \in \Omega_s^q$ по норме:

$$\|A\|_{E_s^q} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 (1 + k^2) e^{2(sk + q|k|)} \right)^{1/2}.$$

Мы будем рассматривать гильбертово пространство l_2 числовых последовательностей $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ таких, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(c^1, c^2)_{l_2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^1 \overline{c_k^2}.$$

Теорема 19.1. Пусть $A \in E_s^q$, тогда $A(w)$ – аналитическая в Ω_s^q функция.

Доказательство. Пусть $v_0 \in [s - q, s + q]$, тогда имеем

$$A(u + iv_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{v_0 k} e^{-iku}.$$

Оценим $|A(u + iv_0)|$

$$|A(u + iv_0)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| e^{v_0 k} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (1 + k^2)^{-1/2} e^{-(sk + q|k|)} e^{v_0 k},$$

где $b_k = |a_k|(1 + k^2)^{1/2}e^{(sk+q|k|)}$. В силу принадлежности A пространству E_s^q последовательность $\{b_k\}$ принадлежит пространству l_2 . Имеет место $-sk - q|k| + v_0k \leq 0$.

Поскольку последовательность $\{(1 + k^2)^{-1/2}\}$ тоже принадлежит пространству l_2 , то в силу неравенства Коши-Буняковского получаем:

$$|A(u + iv_0)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(1 + k^2)^{-1/2} \leq \|b_k\|_{l_2} \|(1 + k^2)^{-1/2}\|_{l_2} < \infty.$$

Следовательно ряд, представляющий функцию $A(w)$:

$$A(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-ikw},$$

сходиться равномерно в замыкании области $\overline{\Omega_s^q}$. Поскольку функции e^{-ikw} аналитичны в области Ω_s^q при всех k , то по теореме Вейерштрасса следует, что и функция $A(w)$ аналитична в области Ω_s^l . \square

Теорема 19.2. Пусть $A(w) \in E_s^q$, тогда для любого фиксированного $v \in [s - q, s + q]$ функция $A(u + iv)$ (как функция от переменной u) принадлежит пространству Соболева $H^1(0, 2\pi)$.

Доказательство. Пусть $v_0 \in [s - q, s + q]$ тогда имеем

$$\|A(u + iv_0)\|_{L_2(0, 2\pi)}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 e^{v_0 k} \leq \|A\|_{E_s^q}^2.$$

Следовательно, $A(u + iv_0) \in L_2(0, 2\pi)$. Аналогично имеем

$$\|A'_u(u + iv_0)\|_{L_2(0, 2\pi)}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^2 |a_k|^2 e^{v_0 k} \leq \|A\|_{E_s^q}^2.$$

Таким образом, функция $A(u + iv_0)$ принадлежит пространству Соболева $H^1(0, 2\pi)$. \square

Теорема 19.3. Пусть функция $A(w)$ аналитичная в области Ω_s^q , 2π -периодичная по переменной u такая, что $A(u + iv) \in H^1(0, 2\pi)$ при всех $v \in [s - q, s + q]$, тогда $A \in E_s^q$, и

$$\|A\|_{E_s^q} = \max_{|v-s| \leq q} \|A(u + iv)\|_{H^1(0, 2\pi)}.$$

Доказательство. Разложим функцию $A(u + is)$ в ряд Фурье по переменной u

$$A(u + is) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_k(s) e^{-ik u}.$$

Поскольку функция A аналитическая в области Ω_s^q , но она может быть продолжена по переменной u в область Ω_s^q . Имеем:

$$A(w) = A(u + is - is + iv) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_k(s) e^{-sk} e^{vk} e^{-ik u},$$

следовательно, $\tilde{a}_k(s) = a_k e^{sk}$. Таким образом

$$A(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_k e^{-ik w}.$$

В силу того, что $A(u + iv) \in H^1(0, 2\pi)$ имеем:

$$\|A(u + iv)\|_{H^1(0, 2\pi)}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 (1 + k^2) e^{2vk} < \infty.$$

Последнее неравенство выполнено для всех $v \in [s - q, s + q]$. С одной стороны имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 (1 + k^2) e^{2(sk + qk)} \leq \|A(u + i(s + q))\|_{H^1(0, 2\pi)}^2 < \infty,$$

а с другой стороны

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} |a_k|^2 (1 + k^2) e^{2(sk - qk)} \leq \|A(u + i(s - q))\|_{H^1(0, 2\pi)}^2 < \infty.$$

Объединяя оба этих неравенства получаем:

$$\|A\|_{E_s^q}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 (1 + k^2) e^{2(sk + q|k|)} \leq \max_{|v-s| \leq q} \|A(u + iv)\|_{H^1(0, 2\pi)}^2 < \infty.$$

Оценим теперь $\max_{|v-s| \leq q} \|A(u + iv)\|_{H^1(0, 2\pi)}$ через норму $\|A\|_{E_s^q}$. Действительно,

$$\max_{|v-s| \leq q} \|A(u + iv)\|_{H^1(0, 2\pi)}^2 = \max_{|v-s| \leq q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 (1 + k^2) e^{2vk} \leq$$

$$\begin{aligned} & \max_{|v-s| \leq q} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 (1+k^2) e^{2vk} + \max_{|v-s| \leq q} \sum_{k=-\infty}^{-1} |a_k|^2 (1+k^2) e^{2vk} = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 (1+k^2) e^{2(s+q)k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} |a_k|^2 (1+k^2) e^{2(s-q)k} = \\ & \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 (1+k^2) e^{2(sk+q|k|)} = \|A\|_{E_s^q}^2. \end{aligned}$$

□

Теорема 19.4. Пусть A, B — две функции из пространства E_s^q , тогда функция $C(w) = A(w)B(w)$ также принадлежит пространству E_s^q и имеет место оценка

$$\|C\|_{E_s^q} \leq c \|A\|_{E_s^q} \|B\|_{E_s^q}.$$

Доказательство. Произведение аналитических функций 2π -периодических есть аналитическая 2π -периодическая функция. Оценим норму $\|AB\|_{E_s^q}$

$$\begin{aligned} \|AB\|_{E_s^q}^2 & \leq \max_{|v-s| \leq q} \|AB\|_{H^1(0,2\pi)}^2 \leq \max_{|v-s| \leq q} (\|AB\|_{L_2(0,2\pi)}^2 \\ & + \|A'B\|_{L_2(0,2\pi)}^2 + \|AB'\|_{L_2(0,2\pi)}^2). \end{aligned}$$

Оценим отдельные слагаемые с помощью теоремы вложения Соболева

$$\max_{|v-s| \leq q} \|AB\|_{L_2(0,2\pi)}^2 \leq c_1 \max_{|v-s| \leq q} \|A\|_{L_2(0,2\pi)}^2 \|B\|_{C[0,2\pi]}^2 \leq c_2 \|A\|_{E_s^q}^2 \|B\|_{E_s^q}^2.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогично:

$$\max_{|v-s| \leq q} \|A'B\|_{L_2(0,2\pi)}^2 \leq c_3 \max_{|v-s| \leq q} \|A'\|_{L_2(0,2\pi)}^2 \|B\|_{C[0,2\pi]}^2 \leq c_4 \|A\|_{E_s^q}^2 \|B\|_{E_s^q}^2,$$

$$\max_{|v-s| \leq q} \|AB'\|_{L_2(0,2\pi)}^2 \leq c_5 \max_{|v-s| \leq q} \|A\|_{C[0,2\pi]}^2 \|B'\|_{L_2(0,2\pi)}^2 \leq c_6 \|A\|_{E_s^q}^2 \|B\|_{E_s^q}^2.$$

□

Теорема 19.5. Пусть A_1, A_2, B_1, B_2 принадлежат шару радиуса $M > 0$ в пространстве E_s^q . Тогда имеет место неравенство

$$\|A_1 B_1 - A_2 B_2\|_{E_s^q} \leq c(M) (\|A_1 - A_2\|_{E_s^q} + \|B_1 - B_2\|_{E_s^q}).$$

Доказательство. В силу теоремы 19.4 имеем

$$\begin{aligned} \|A_1B_1 - A_2B_2\|_{E_s^q} &= \|A_1B_1 - A_1B_2 + A_1B_2 - A_2B_2\|_{E_s^q} \\ &\leq \|A_1(B_1 - B_2)\|_{E_s^q} + \|(A_1 - A_2)B_2\|_{E_s^q} \leq \\ &c(M)(\|A_1 - A_2\|_{E_s^q} + \|B_1 - B_2\|_{E_s^q}). \end{aligned}$$

□

Введем линейный оператор Гильберта $H : E_s^q \rightarrow E_s^q$ по формуле

$$H : \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-ikw} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-i \operatorname{sign} k) a_k e^{-ikw}.$$

Теорема 19.6. *Оператор $H : E_s^q \rightarrow E_s^q$ является ограниченным оператором, причем $\|H\| \leq 1$.*

Доказательство. Для любой функции $A \in E_s^q$ имеем

$$\begin{aligned} \|H(A)\|_{E_s^q}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{-1} |a_k|^2 (1 + k^2) e^{2(sk+q|k|)} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 (1 + k^2) e^{2(sk+q|k|)} \leq \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 (1 + k^2) e^{2(sk+q|k|)} = \|A\|_{E_s^q}^2. \end{aligned}$$

□

Теорема 19.7. *Для любых $s \in \mathbb{R}$, $q > q' > 0$ и любой функции $A \in E_s^q$ производная A'_w принадлежит пространству $E_s^{q'}$ и имеет место оценка*

$$\|A'\|_{E_s^{q'}} \leq \frac{e^{-1}}{q - q'} \|A\|_{E_s^q}.$$

Доказательство. Если аналитическая функция $A(w)$ представляется рядом

$$A(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-ikw},$$

тогда производная $A'(w)$ представима рядом

$$A'(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (-ik) e^{-ikw}$$

в области $\Omega_{q'}$. Последовательность

$$b_k = |a_k|(1 + k^2)^{1/2} e^{sk+q|k|}$$

принадлежит пространству l_2 . Тогда имеем оценку нормы $\|A\|_{E_s^{q'}}^2$ следующим образом:

$$\|A'\|_{E_s^{q'}}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 k^2 (1 + k^2) e^{2(sk+q'|k|)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 k^2 e^{2(q'-q)|k|} \leq$$

$$\frac{e^{-2}}{(q - q')^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{e^{-2}}{(q - q')^2} \|A\|_{E_s^q}^2.$$

В этой оценке использовано элементарное неравенство

$$k^2 e^{-2(q-q')|k|} \leq \frac{e^{-2}}{(q - q')^2},$$

верное для всех k

□

19.2. Разрешимость уравнений

Распишем уравнения (II.18) следующим образом. Пусть $R = R_1 + iR_2$, $V = V_1 + iV_2$, тогда имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= U'_1 R_2 + U'_2 R_1 - U_1 R'_2 - U_2 R'_1, \\ \dot{R}_2 &= U_1 R'_1 + U_2 R'_2 - U'_1 R_1 + U'_2 R_2, \\ \dot{V}_1 &= B'_1 R_2 + B'_2 R_1 - U_1 V'_2 - U_2 V'_1 + g(R_1 - 1), \\ \dot{V}_2 &= U_1 V'_1 + U_2 V'_2 - B'_1 R_1 + B'_2 R_2 + gR_2, \end{aligned} \tag{VII.1}$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 V_1 + R_2 V_2, \\ U_2 &= H[R_1 V_1 + R_2 V_2], \\ B_1 &= \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2), \\ B_2 &= \frac{1}{2}H[V_1^2 + V_2^2]. \end{aligned}$$

Запишем уравнения (VII.1) в векторной форме. Через E_s^q обозначим пространство $\prod_{l=1}^4 E_s^q$, где \prod означает прямое произведение пространств. Введем отображение $F : E_s^q \rightarrow E_s^q$, порожденное правой частью уравнений (VII.1). Введем обозначение $W = [R_1, R_2, V_1, V_2]^T$. Тогда имеем следующую запись уравнений

$$\dot{W} = F(W). \quad (\text{VII.2})$$

Уравнение (VII.2) будем рассматривать с начальным условием

$$W(0) = W_0, \quad (\text{VII.3})$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} R_{10} &= 1, \\ R_{10} &= 0, \\ V_{10} &= 0, \\ V_{20} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{VII.4})$$

где $R_{10}, R_{20}, V_{10}, V_{20}$ суть коэффициенты Фурье функций R_1, R_2, V_1, V_2 соответствующие $k = 0$.

Определение 19.1. Функция $W(t) = [R_1(t), R_2(t), V_1(t), V_2(t)]^T$, аналитичная на $(0, T)$ со значениями в E_s^q при некоторых $s \in \mathbb{R}, q > 0$, называется аналитичным (s, q) -решением задачи (VII.2)–(VII.4), если W удовлетворяет (VII.2)–(VII.4).

Теорема 19.8. Для фиксированных $s \in \mathbb{R}$ и $q_1 > 0$ пусть $W_0 \in E_s^{q_1}$ и W_0 удовлетворяет условиям (VII.4), тогда для любого $q_2 \in (0, q_1)$ существует $T = T(W_0, q_2)$ такое, что при $t \in (0, T)$ существует единственное (s, q_2) -аналитическое решение задачи (VII.2)–(VII.4).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу относительно W_a в E_s^q

$$\dot{W}_a = F(W_a + W_0), \quad (\text{VII.5})$$

$$W_a(0) = 0. \quad (\text{VII.6})$$

В силу теорем 19.1–19.7 к задаче (VII.5), (VII.6) применима теорема Ниренберга-Нисиды (теорема, с. 220, [31] и теорема, с. 629, [84]). По этой теореме существует $T = T(q_2) > 0$ такое что при $t \in (0, T)$ существует единственное аналитическое решение задачи (VII.5), (VII.6). Тогда функция $W(t) = W_a(t) + W_0$ будет (s, q_2) -аналитическим решением задачи (VII.2), (VII.3). Нужно еще показать, что функция W

удовлетворяет условию (VII.4). По условию теоремы начальное условие W_0 удовлетворяет этому условию, с другой стороны, пусть $A \in E_s^q$, тогда для функции $B = F(A) \in E_s^{q'}$ имеет место

$$\begin{aligned} B_{10} &= 0, \\ B_{20} &= 0, \\ B_{30} &= 0, \\ B_{40} &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция W удовлетворяет условию (VII.4) при всех $t < T$. \square

Замечание 19.1. Поскольку задача (VI.2)–(VI.4) эквивалентна задаче (II.18), от теорема 19.8 устанавливает разрешимость задачи (II.18).

Теорема 19.8 устанавливает разрешимость уравнений (II.18) в шкале E_s^q , для любых $s \in \mathbb{R}$, $q > 0$. Однако не каждое решение из шкалы пространств E_s^q будет соответствовать физической модели, описывающей поверхностные волны идеальной жидкости со свободной поверхностью. Поэтому (s, q) -решения мы называем формальными решениями. Среди формальных решений можно выделить подмножество решений, которые мы будем называть физическими решениями.

Пусть $R(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(t) e^{-iku}$, где $r_0 = 1$. Тогда последовательность $c_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$ определим как решение системы:

$$c_0 = 1,$$

$$\sum_{j=0}^k c_{k-j}(t) r_j(t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Эта система получается при формальном делении $\frac{1}{R}$. Поскольку эта система является диагональной, то ее решение может быть получено по рекуррентным формулам.

Определение 19.2. Формальное (s, q) -решение R, V называется физическим решением на $[T_1, T_2]$, если выполнены следующие условия:

1. Функции R, V являются аналитическими в нижней полуплоскости при всех $t \in [T_1, T_2]$.
2. Функция, определенная по формуле

$$z(u, t) = u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} c_k(t) e^{-iku},$$

является непрерывной по u функцией при всех $t \in [T_1, T_2]$.

3. Кривая, заданная как геометрическое место точек

$$\Gamma(t) = \{(x, y) : x = \operatorname{Re} z(u, t), y = \operatorname{Im} z(u, t), u \in [0, 2\pi]\},$$

является кривой Жордана, т.е. непрерывной и без точек самопересечения, причем $\operatorname{Re} z(0, t) = 0$, $\operatorname{Re} z(2\pi, t) = 2\pi$ и $\operatorname{Im} z(0, t) = \operatorname{Im} z(2\pi, t)$ при всех $t \in [T_1, T_2]$.

Функции $R(u, t)$ и $V(u, t)$ мы будем называть физическим решением. при $t = t_0$, если эти функции являются физическим решением на $[t_0, t_0]$.

Теорема 19.9. Пусть начальные функции $R_0(u)$ и $V_0(u)$ принадлежат пространству E_s^q , где $s > 0$ и R_0, V_0 удовлетворяют условиям (ВП.4). Предположим также, что $R_0(u)$ и $V_0(u)$ являются физическим решением при $t = 0$, тогда существует такое $0 < T \leq \infty$, что на $[0, T - \varepsilon_1]$ существует физическое решение при любом $0 \leq \varepsilon_1 \leq T$ и при любом $\varepsilon_2 > 0$ не существует физического решения на $[0, T + \varepsilon_2]$.

Доказательство. Выберем произвольное число $s < 0$. Прежде всего заметим, что R_0 и V_0 принадлежат пространству E_s^τ при $\tau = -\frac{q}{2}$. Следовательно, существует формальное $(s, -\frac{q}{4})$ -решение на некотором $[0, T']$. Определим число T по формуле:

$$T = \sup\{S \geq 0 : R, V \text{ - физическое решение на } [0, S]\}.$$

Если $T' < \infty$, то $T < T'$. Действительно, если бы R и V были бы физическими решениями на $[0, T']$, то формальное (s, q) -решение существовало бы на $[0, T' + \varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Из определения числа T следует, что это число является тем числом, которое утверждается в теореме. Заметим, что это число не зависит от выбора s . \square

20. Конструктивное исследование уравнений, описывающих волны на воде

20.1. Эволюционное уравнение

Основной результат об оценке времени существования решений уравнений, описывающих волны на воде мы получим как частный случай для абстрактного эволюционного функционально-дифференциального уравнения.

Для каждого $T \in (0, \mathbb{T}]$, $\mathbb{T} > 0$ будем рассматривать пару банаховых пространств E_T^0, E_T^1 . Также будем предполагать, что существуют следующие проекторы

$$P_{T_1, T_2}^i : E_{T_1}^i \rightarrow E_{T_2}^i, \quad 0 < T_2 \leq T_1 \leq \mathbb{T}, \quad i = 0, 1;$$

удовлетворяющие условиям

$$P_{T_1, T_3}^i = P_{T_2, T_3}^i P_{T_1, T_2}^i, \quad i = 0, 1$$

для любых $0 < T_3 \leq T_2 \leq T_1 \leq \mathbb{T}$. Для краткости будем использовать следующее обозначение $P_{T, T}^i = P_T^i$.

В пространстве E_T^1 будем рассматривать компактное множество $M \in E_T^1$. Через M_T обозначим образ: $P_{T, T}^1 M$.

Введем семейство непрерывных, вообще говоря, нелинейных операторов

$$\Phi_T : M_T \rightarrow E_T^0,$$

для всех $T \in (0, \mathbb{T}]$.

Мы будем рассматривать следующую задачу при фиксированном T

$$\Phi_T u = 0, \quad T \in (0, \mathbb{T}]$$

(VI.7)

$$u \in M_T,$$

Рассмотрим функционал $J : (0, \mathbb{T}] \times M \rightarrow \mathbb{R}$, определенный по формуле

$$J(T, u) = \|\Phi_T P_T^1 u\|_{E_T^0}.$$

Теперь введем числовую функцию $I(T)$, определенную на $(0, \mathbb{T}]$ по следующей формуле

$$I(T) = \inf_{u \in M} J(T, u).$$

Поскольку при фиксированном $T \in (0, \mathbb{T}]$ функционал $J(T, \cdot)$ является непрерывным на компактном множестве M , то справедлива следующая лемма.

Лемма 20.1. Пусть для некоторого $0 < T \leq \mathbb{T}$ имеет место $I(T) = 0$, тогда существует такой элемент $u \in M_T$, что

$$\Phi_T u = 0.$$

Задачу (VII.7) мы будем приближать эволюционными включениями. Для любого неотрицательного числа $\varepsilon \geq 0$ рассмотрим включение

$$\begin{aligned} \Phi_T u \in \{f \in E_T^0 : \|f\|_{E_T^0} \leq \varepsilon\}, \\ u \in M_T \end{aligned} \tag{VII.8}$$

$$T \in (0, T]$$

В случае, когда $\varepsilon = 0$ задача (VII.8) совпадает с задачей (VII.7). Также как и для задачи (VII.7) при решении задачи (VII.8) необходимо найти максимальное значение $T \in (0, T]$ и элемент $u \in M_T$, для которых верно (VII.8). Введем обозначение $B_0(\varepsilon) = \{f \in E_T^0 : \|f\|_{E_T^0} \leq \varepsilon\}$, где при $\varepsilon > 0$ множество $B_0(\varepsilon)$ есть шар радиуса ε .

Приведем естественное условие, при котором задача (VII.8) всегда имеет решение.

Условие 1. Существует такой элемент $v \in M$, что имеет место

$$\lim_{T \rightarrow 0} \|\Phi_T P_T^1 v\|_{E_T^0} = 0. \tag{VII.9}$$

Замечание 20.1. В случае пространств $E_T^0 = L_p(0, T; X)$, где $1 \leq p < \infty$, X — некоторое банахово пространство, условие 1 будет выполненным.

Лемма 20.2. Пусть выполнено условие 1, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\chi > 0$ и такое $u \in M_\chi$, что

$$\Phi_\chi u \in B_0(\varepsilon).$$

Доказательство. Доказательство леммы непосредственно следует из (20.2). \square

Введем числовую функцию $\chi(\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ по следующей формуле

$$\chi(\varepsilon) = \sup\{T \in (0, T] : I(T) \leq \varepsilon\}.$$

Согласно лемме 20.2 множество $\{T \in (0, T] : I(T) \leq \varepsilon\}$ непусто, и поэтому функция $\chi(\varepsilon)$ определена корректно. Функция χ имеет смысл максимального интервала существования решения задачи (VII.8).

Введем величину для уравнения (VII.7), которая будет определять максимальный интервал существования решения этого уравнения.

Определение 20.1. Величина LT , определенная по формуле

$$LT = \begin{cases} \sup\{T \in (0, \mathbb{T}] : I(T) = 0\}, & \{T \in (0, \mathbb{T}] : I(T) = 0\} \neq \emptyset \\ 0, & \{T \in (0, \mathbb{T}] : I(T) = 0\} = \emptyset \end{cases}$$

называется интервалом существования решения задачи (VII.7).

Покажем, что с помощью приближения уравнения (VII.7) включениями (VII.8) величину LT можно оценить с помощью функции $\chi(\varepsilon)$.

Теорема 20.1. Пусть выполнено условие 1, тогда имеет место

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi(\varepsilon) = LT. \quad (\text{VII.10})$$

Доказательство. По построению функции $\chi(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$LT \leq \chi(\varepsilon) \leq \mathbb{T} \quad (\text{VII.11})$$

верное для любого $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим произвольную числовую последовательность $\varepsilon_n > 0$, сходящуюся к нулю. Тогда в силу (VII.11) числовая последовательность $\chi_n = \chi(\varepsilon_n)$ принадлежит ограниченному отрезку $[LT, \mathbb{T}]$. Рассмотрим верхний предел последовательности χ_n . Пусть ε_{n_m} , $n_m \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ таковы, что

$$T' = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_{n_m}.$$

Если $T' = LT$, то и вся последовательность χ_n сходится к LT , и теорема доказана. Предположим, что $LT < T'$, это означает, что существует такое $\tau > 0$, что для всех достаточно больших m выполнено неравенство

$$LT + \tau \leq \chi_{n_m}.$$

Из этой оценки в силу неубывания функции $I(T)$ следует оценка

$$I(LT + \tau) \leq \varepsilon_{n_m}. \quad (\text{VII.12})$$

Переходя в неравенстве (VII.12) к пределу при $m \rightarrow \infty$ мы получаем равенство

$$I(LT + \tau) = 0,$$

что согласно лемме 20.2 противоречит определению величины LT . Поэтому предположение, что $T' > LT$ приводит к противоречию, и, следовательно, возможен лишь случай $T' = LT$. От куда, как мы уже отмечали, следует, что вся последовательность χ_n сходится к LT . В силу произвольности последовательности ε_n , мы получаем, что функция $\chi(\varepsilon)$ непрерывна в нуле и имеет своим пределом величину LT . \square

20.2. Применение к уравнениям, описывающим поверхностные волны

Сейчас рассмотрим применение теоремы (20.1) к уравнениям (VII.29), которые описывают поверхностные волны на воде при наличии внешних воздействий.

В качестве пространства E_T^0 определим пространство:

$$E_T^0 = L_\infty(0, T; \prod_{n=1}^4 L_2(0, 2\pi)) \times E_0^q,$$

а в качестве пространства E_T^1 возьмем пространство $W_\infty^1(0, T; E_0^q)$, где $q > 0$ некоторое фиксированное число, а пространства E_s^q определены выше. Оператор Φ_T определим по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \Phi_T(R_1, R_2, V_1, V_2) = \\ (\dot{R}_1 - U_1' R_2 - U_2' R_1 + U_1 R_2' + U_2 R_1' - F_{11}^T[R_1, R_2, V_1, V_2], \\ \dot{R}_2 - U_1 R_1' - U_2 R_2' + U_1' R_1 - U_2' R_2 - F_{12}^T[R_1, R_2, V_1, V_2], \\ \dot{V}_1 - B_1' R_2 - B_2' R_1 + U_1 V_2' + U_2 V_1' - g(R_1 - 1) - F_{21}^T[R_1, R_2, V_1, V_2], \\ \dot{V}_2 - U_1 V_1' - U_2 V_2' + B_1' R_1 - B_2' R_2 - gR_2 - F_{22}^T[R_1, R_2, V_1, V_2], \\ R_1|_{t=0}, R_2|_{t=0}, V_1|_{t=0}, V_2|_{t=0}), \end{aligned} \tag{VII.13}$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 V_1 + R_2 V_2, \\ U_2 &= H[R_1 V_1 + R_2 V_2], \\ B_1 &= \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2), \\ B_2 &= \frac{1}{2}H[V_1^2 + V_2^2]. \end{aligned}$$

Рассмотрим операторы F_{ij}^T , $i, j = 1, 2$. Эти операторы действуют в следующих пространствах:

$$F_{ij}^T : W_\infty^1(0, T; E_0^q) \rightarrow L_\infty(0, T; L_2(0, 2\pi)).$$

Заметим, что значение функции $f(t, u) = F_{ij}^T[R_1, R_2, V_1, V_2]$ зависит от всех значений функций $R_1(t, u)$, $R_2(t, u)$, $V_1(t, u)$, $V_2(t, u)$ при $t \in [0, T]$.

Поэтому уравнения (VII.13) представляют собой систему эволюционных функционально-дифференциальных уравнений.

Для применения теоремы 20.1 необходимо выбрать компактное в пространстве $E_{\mathbb{T}}^1$ множество M . При исследовании волн на воде в качестве такого множества обычно выбирается следующее множество:

$$M = C^2([0, \mathbb{T}]; \prod_{n=1}^4 E(q_1, C_1)),$$

где $q_1 > q$, а множество $E(q_1, C_1) \subset E_0^q$ состоит из всех функций $A \in E_0^q$, имеющих следующий вид:

$$A(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-iku}, \quad (\text{VII.14})$$

$$|a_k| \leq C_1 e^{-q_1 |k|}.$$

Поскольку $q_1 > q$, множество $\prod_{n=1}^4 E(q_1, C_1)$ будет компактным в пространстве E_0^q , а по обобщенной теореме Арцела множество M будем компактным в пространстве $C^1([0, \mathbb{T}]; E_0^q)$ и, следовательно, в пространстве $E_{\mathbb{T}}^1$.

В практических вычислениях условие (VII.14) означает экспоненциальное убывание по модулю коэффициентов a_k , что является необходимым условием для эффективного проведения расчетов. Теорема 20.1 позволяет оценить время существования решений задачи (VII.13).

20.3. Метод оценочных функционалов

Опишем еще один метод, с помощью которого мы будем оценивать время существования решения эволюционного уравнения. Пусть H — гильбертово пространство. Будем предполагать, что пространство H является сепарабельным и бесконечномерным. Через e_k обозначим ортонормированный базис в H . Введем непрерывный, вообще говоря, нелинейный оператор $A : D \rightarrow H$, где D — гильбертово пространство, плотно и непрерывно вложенное в H такое, что $\{e_k\} \subset D$. Будем рассматривать задачу Коши

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in (0, T) \quad (\text{VII.15})$$

$$u(0) = \varphi, \quad \varphi \in H. \quad (\text{VII.16})$$

Определение 20.2. Решением задачи (VII.15), (VII.16) на $(0, T)$ будем называть функцию $u \in L_2(0, T; D)$, $u' \in L_2(0, T; H)$, удовлетворяющую (VII.15), (VII.16).

Замечание 20.2. В силу замечания 2.2 [43] функция $u \in L_2(0, T; D)$ такая, что $u' \in L_2(0, T; H)$, имеет след $u(0) \in H$.

Для построения шкалы гильбертовых пространств рассмотрим систему функций $\{\gamma_k(s)\}$, определенную для $k = 1, 2, \dots$ и $s \geq 0$, такую, что для каждого фиксированного k имеет место: $\gamma_k(s) > 0$; $\gamma_k(0) = 1$; $\gamma_k(s)$ непрерывны и строго убывают по s . Пространства H_s , $s \geq 0$ введем как замыкание всех линейных оболочек $\sum_{k=1}^N u_k e_k$ по норме

$$\|u\|_{H_s}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 \gamma_k^{-2}(s),$$

где $u_k = (u, e_k)_H$.

Введем конечномерный проектор P_N в пространстве H по формуле

$$P_N \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k \right) = \sum_{k=1}^N u_k e_k.$$

Задачу (VII.15), (VII.16) будем аппроксимировать конечномерными задачами:

$$(u^N)'(t) = P_N A u^N(t), \quad t \in (0, T) \quad (\text{VII.17})$$

$$u^N(0) = P_N \varphi, \quad \varphi \in H. \quad (\text{VII.18})$$

Предположение 1. Существуют такие числа $s_l > 0$ и $t_l > 0$, $l = 0, 1, \dots$, что при всех N задача (VII.17), (VII.18) имеет единственное решение $u^N(t) \in H_{s_l}$ при $t \in (0, t_N)$, а задача (VII.15), (VII.16) имеет единственное решение u на $(0, t_0)$, и при почти всех $t \in (0, t_0)$ это решение принадлежит H_{s_0} . При этом для некоторого $T > 0$ имеет место

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u\|_{L_2(0, T; H_{s_0})} = 0.$$

Для любого элемента $u \in H_s$, $s > 0$ введем функцию

$$\nu(u) = \varliminf_{k \rightarrow \infty} \nu_k(u_k),$$

где функция $\nu_k(u_k)$ такая, что

$$\gamma_k(\nu_k(u_k)) = |u_k|,$$

Для $1 \geq |u_k| > 0$, для $u_k > 1$ полагаем $\nu(u_k) = 0$, для $u_k = 0$ имеем $\nu(0) = \infty$.

Теорема 20.2. Пусть $u \in H_s$, тогда $\nu(u) \geq s$.

Доказательство. Имеем представление

$$|u_k| = \alpha_k \gamma_k(s),$$

где $\alpha_k \in l_2$. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha_k < 1$. Поскольку функция $\nu_k(a)$ не возрастает, то имеем

$$\nu_k(|u_k|) = \nu_k(\alpha_k \gamma_k(s)) \geq \nu_k(\gamma_k(s)) = s.$$

□

Теорема 20.3. Предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_k(s_2)}{\gamma_k(s_1)} \right)^2$ сходится для $0 < s_1 < s_2$, тогда для $u \in H_0$ такого, что $\nu(u) = s$, $0 < s < \infty$ имеет место $u \in H_{s-\varepsilon}$ для любого $\varepsilon \in (0, s)$.

Доказательство. Пусть фиксировано $\varepsilon \in (0, s)$. Обозначим

$$\delta_k = \nu_k(u_k) - s.$$

Поскольку

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(u_k) = \nu(u) = s,$$

то существует такое $K > 0$, что $\delta_k > -\varepsilon$ при $k \geq K$. В этом случае имеем

$$|u_k| = \gamma_k(s + \delta_k), \quad k \geq K.$$

В силу условия на $\gamma_k(s)$ получаем

$$\|u\|_{H_{s-\varepsilon}}^2 = \sum_{k=1}^{K-1} |u_k|^2 \gamma_k^{-2}(s - \varepsilon) + \sum_{k=K}^{\infty} \left(\frac{\gamma_k(s_2)}{\gamma_k(s_1)} \right)^2 < \infty.$$

□

Для нас наиболее важным будет случай, когда $\gamma_k(s) = e^{-ks}$. Применим наши результаты к системе уравнений, описывающих поверхностные волны на воде.

Наряду с вычислением функций R^N , V^N , будем еще вычислять числовую функцию $\nu_k^N(t)$, определенную следующим образом:

$$\nu_k^N(t) = \min \left\{ \frac{|\ln |R_k^N(t)||}{k}, \frac{|\ln |V_k^N(t)||}{k} \right\}, \quad k \leq N,$$

предполагая, без ограничения общности, что $R_k^N(t) \neq 0$, $V_k^N(t) \neq 0$.

Функция ν_k^N аппроксимирует функцию $\nu(t)$, построенную по точным решениям системы (II.18) функциям $R(t)$ и $V(t)$:

$$\nu(t) = \min \left\{ \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|\ln |R_k||}{k}, \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|\ln |V_k||}{k} \right\}.$$

Функция ν имеет естественную интерпретацию. Функции R , V являются аналитическими в нижней комплексной полуплоскости и имеющими особенности в верхней полуплоскости. Значение функции ν определяет расстояние особенностей до вещественной оси. До тех пор пока $\nu > s_0$, $s_1 > s_0 > 0$, система (II.18) имеет s_0 -решение. Функцию $\nu_k^N(t)$ будем называть оценочным функционалом.

20.4. Методы построения точных решений эволюционных уравнений

Сейчас мы рассмотрим методы, позволяющие строить точные решения эволюционных уравнений с помощью аппроксимаций функционально-дифференциальных включений. Введем два сепарабельных пространства: E_0 , E_1 , которые удовлетворяют следующему условию:

$$E_1 \subset E_0 \text{ — вложение плотное и непрерывное.}$$

Введем непрерывный оператор

$$A : E_1 \rightarrow E_0.$$

Будем рассматривать следующее эволюционное уравнение в банаховом пространстве E_0 .

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0, T] \quad (\text{VII.19})$$

с начальным условием

$$u(0) = \varphi, \quad (\text{VII.20})$$

где $f \in L_\infty([0, T]; E_0)$, $\varphi \in E_1$.

Мы будем рассматривать решения согласно следующему определению.

Определение 20.3. Функция $u \in W_\infty^1([0, T]; E_1)$ называется решением задачи (VII.19)–(VII.20), если функция u удовлетворяет (VII.19)–(VII.20).

Мы будем изучать задачу (VII.19)–(VII.20) с точки зрения конструктивного построения решений. Для этого мы будем предполагать, что пространство E_1 содержит счетное множество элементов, которые являются достаточно богатыми для описания решений задачи (VII.19)–(VII.20). Будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 2. *Существует счетное множество*

$$e_k \in E_1, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

такое, что для любой конечной линейной комбинации

$$v = \sum_{k=0}^{N_0} \alpha_k e_k,$$

элемент $w = Av$ представим в виде конечной линейной комбинации:

$$w = \sum_{k=0}^{N(v)} \beta_k(v) e_k.$$

Пусть функция из правой части уравнения (VII.19) равна нулю, а начальная функция из условия (VII.20) представима в виде конечной линейной комбинации:

$$\varphi = \sum_{k=0}^{N_\varphi} \varphi_k e_k.$$

В этих условиях мы можем построить приближенное решение задачи (VII.19)–(VII.20) с помощью одношаговых численных методов таких, как метод Эйлера или явные методы Рунге-Кутты. Мы опишем сейчас схему метода Эйлера, как наиболее простую.

Пусть выбрано целое число $M > 0$. По рекуррентным формулам:

$$u_0^M = \varphi,$$

$$u_n^M = u_{n-1}^M + hAu_{n-1}^M, \quad n = 1, 2, \dots, M,$$

где $h = \frac{T}{M}$. В силу условия 2 каждый элемент u_n^M представим в виде конечной линейной комбинации элементов e_k , поэтому можно ввести конечную величину по следующей формуле:

$$D = \max\{k : (u_n^M)_k \neq 0, n = 1, 2, \dots, M\}$$

где $(u_n^M)_k$ — «координаты» элемента u_n^M :

$$u_n^M = \sum_{k=0}^N (u_n^M)_k e_k.$$

Величина D имеет смысл размерности нашего приближенного решения. Благодаря условию 2 мы имеем дело с конечномерной задачей при использовании одношаговых явных методов.

Поскольку все элементы u_n^M принадлежат пространству E_1 , то с помощью подходящей интерполяции (например линейной):

$$u^M(t) = \frac{t_n - t}{h} u_{n-1}^M + \left(1 - \frac{t_n - t}{h}\right) u_n^M, \quad t \in [t_{n-1}, t_n], \quad n = 1, 2, \dots, M,$$

где $t_n = \frac{T}{M}n$, $n = 0, 1, \dots, M$, мы получаем функцию $u^M(t)$, принадлежащую пространству $W_\infty^1([0, T]; E_1)$. Подставим функцию $u^M(t)$ в уравнение (VII.19):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - A\right) u^M(t) &= \frac{1}{h} (-u_{n-1}^M + u_n^M) - \\ A \left(\frac{t_n - t}{h} u_{n-1}^M + \left(1 - \frac{t_n - t}{h}\right) u_n^M\right) &= F^M(t), \\ t \in [t_{n-1}, t_n], \quad n &= 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

В силу условия 2 функция $F^M(t)$ принадлежит пространству $L_\infty([0, T]; E_1)$. По построению функция $u^M(t)$ удовлетворяет условию (VII.20), поэтому функция $u^M(t)$ является решением задачи (VII.19)–(VII.20) с функцией $F^M(t)$ в качестве правой части.

Во многих прикладных задачах функция правой части уравнения (VII.19) имеет смысл определенной физической величины. Как правило физические величины всегда известны лишь некоторой погрешностью. Поэтому умение находить функции, которые удовлетворяют исходному уравнению с заданной погрешностью, часто является достаточным. Следующая теорема устанавливает, что при условии 2 задача может быть решена с заданной погрешностью в конечном виде, что открывает возможности для проведения доказательных вычислений.

Теорема 20.4. Пусть выполнено условие 2. Для любых $M > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $T \in (0, T]$, что на $[0, T]$ функция u^M является решением задачи (VII.19)–(VII.20) с правой частью $F^M \in L_\infty([0, T]; E_0)$ такой, что

$$\|F^M\|_{L_\infty([0, T]; E_0)} \leq \varepsilon.$$

Доказательство. С помощью описанного выше метода Эйлера мы имеем функцию $u^M \in W_\infty^1([0, T]; E_1)$ и функцию $F^M(t)$:

$$F^M(t) = \left(\frac{d}{dt} - A \right) u^M(t).$$

Функция $F^M \in L_\infty([0, T]; E_0)$, поэтому введем числовую функцию

$$J(T) = \|F^M\|_{L_\infty([0, T]; E_0)}.$$

По построению функция $J : (0, T] \rightarrow (0, \|F^M\|_{L_\infty([0, T]; E_0)})$ является неубывающей. Покажем, что функция $J(T)$ стремится к нулю при $T \rightarrow 0$. Когда $T < h$ функция $u^M(T)$ имеет вид:

$$u^M(T) = \varphi + TA\varphi.$$

Соответственно, функция $F^M(T)$ имеет вид:

$$F^M(T) = A\varphi - A[\varphi + TA\varphi].$$

Функция $J(T)$ вычисляется по формуле:

$$J(T) = \max_{t \in [0, T]} \|A\varphi - A[\varphi + TA\varphi]\|_{E_0}.$$

Поскольку оператор A непрерывный как отображение $A : E_1 \rightarrow E_0$, то имеем

$$A[\varphi - TA\varphi] \rightarrow A\varphi, \quad T \rightarrow 0.$$

Следовательно, функция $J(T)$ является непрерывной при $0 < T < h$ и стремится к нулю при $T \rightarrow 0$:

$$\lim_{T \rightarrow 0} J(T) = 0.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $T > 0$, что имеет место:

$$\|F^M\|_{L_\infty([0, T]; E_0)} \leq \varepsilon.$$

□

Теорема 20.4 ориентирована на конкретный метод Эйлера, однако идея этого метода может быть обобщена. Сейчас мы рассмотрим абстрактный метод дискретизации исходной задачи. Для каждого $M > 0$ введем конечное множество

$$V^M \subset W_\infty^1([0, T]; E_1).$$

Будем предполагать, что множества V^M удовлетворяют следующему условию.

Условие 3. 1. Каждый элемент $u \in V^M$ удовлетворяет начальному условию (VII.20):

$$u(0) = \varphi.$$

2. Каждое множество V^M содержит, как минимум один такой элемент $U \in V^M$, что для достаточно малого t функция $U(t)$ непрерывно дифференцируема по t со значениями в E_1 , а также:

$$U'(0) = A\varphi.$$

Для фиксированных $M > 0$ и $0 < T \leq T$ будем рассматривать функцию u_T^M которая удовлетворяет следующему условию:

$$\|(u_T^M)' - Au_T^M\|_{L_\infty([0,T];E_0)} = \min_{u \in V_T^M} \|u' - Au\|_{L_\infty([0,T];E_0)}, \quad (\text{VII.21})$$

где через V_T^M обозначено сужение множества функций V^M на $[0, T]$.

Значение этого минимума обозначим через:

$$\Delta_T^M = \|(u_T^M)' - Au_T^M\|_{L_\infty([0,T];E_0)}.$$

Заметим, что функций, на которых реализуется минимум в (VII.21) может быть более одного, но поскольку множество V^M конечно, то мы будем считать, что фиксировано правило, согласно которому осуществляется отбор функций u_T^M .

Теорема 20.5. Пусть выполнено условие 3. Для любого $\delta > 0$ и $M > 0$ существует такое $T \in (0, T]$, что на $[0, T]$ функция u_T^M является решением задачи (VII.19)–(VII.20) с правой частью $F^M \in L_\infty([0, T]; E_0)$ такой, что

$$\|F^M\|_{L_\infty([0,T];E_0)} \leq \delta.$$

Доказательство. Введем числовую функцию:

$$g(T) = \Delta_T^M,$$

заданную на $[0, T]$ при фиксированном M . Для доказательства теоремы достаточно показать, что функция $g(T)$ стремится к нулю при T стремящемся к нулю. Пусть $U \in V^M$ — функция из условия 3. Очевидно, что имеет место

$$g(T) \leq \|U' - AU\|_{L_\infty([0,T];E_0)}.$$

Пусть T достаточно мало, что согласно условию 3, функция $U(t)$ непрерывно дифференцируема по t со значениями в E_1 , а также:

$$U'(0) = A\varphi.$$

$$g(T) \leq \max_{t \in [0, T]} \|U'(t) - AU(t)\|_{E_0}. \quad (\text{VII.22})$$

В силу условия 3 и непрерывности оператора A мы имеем

$$U'(t) \rightarrow A\varphi, \quad t \rightarrow 0$$

и

$$AU(t) \rightarrow A\varphi, \quad t \rightarrow 0.$$

Поэтому из (VII.22) следует, что

$$g(T) \rightarrow 0. \quad t \rightarrow 0.$$

□

Полученные приближенные решения можно объявить точными решениями возмущенных уравнений. а теоремы 20.4 и 20.5 гарантируют, что для достаточно малых значений переменной t мы всегда можем построить точное решение уравнения с возмущениями меньшими заранее заданной величиной. Теоремы 20.4 и 20.5 могут быть применены при фиксированном значении параметра дискретизации M , что, как правило, и имеет место в практике компьютерных вычислений.

Приведем пример наиболее часто встречающихся пространств V^M . Пусть $Q \subset \mathbb{R}$ — подмножество вещественных чисел, которые могут быть представлены на используемом компьютере. Пусть N есть положительное целое число. Обозначим через Q^e множество элементов пространства E_1 представимых в виде:

$$v = \sum_{k=0}^N \alpha_k e_k,$$

где $\alpha_k \in Q$. Рассмотрим разбиение отрезка $[0, T]$:

$$t_n = hn, \quad h = \frac{T}{M}, \quad n = 0, 1, \dots, M.$$

Множество функций V^M состоит из функций, заданных на отрезке $[0, T]$ построенных с помощью линейной интерполяцией:

$$u^M(t) = \frac{t_n - t}{h} u_{n-1}^M + \left(1 - \frac{t_n - t}{h}\right) u_n^M, \quad t \in [t_{n-1}, t_n], \quad n = 1, 2, \dots, M,$$

где узловые значения этих функций принадлежат множеству Q^e :

$$u_n^M \in Q^e, \quad n = 0, 1, \dots, M, \quad M = 1, 2, \dots$$

Чтобы удовлетворить условию 3 необходимо рассматривать множество начальных данных задачи (VII.19)-(VII.20) таких, что:

$$\varphi \in Q''$$

п

$$A\varphi \in Q''.$$

Заметим, что на практике часто нет необходимости находить решения согласно соотношению (VII.21). Мы будем аппроксимировать уравнение (VII.19) методом прямых N -мерными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений мы будем решать стандартным методом Рунге-Кутты 4-го порядка. После получения приближенного решения, мы вычисляем полученную невязку. Если величина этой невязки оказывается удовлетворительной, то мы получили точное решение возмущенного уравнения. В противном случае, следует уменьшить временной интервал, на котором ищется приближенное решение. Теорема 20.5 гарантирует, что при достаточно малом временном интервале величина невязки будет меньше любого наперед заданной величины.

Мы рассмотрели методы нахождения точных решений эволюционных уравнений с помощью возмущения исходного уравнения. При этом решающим фактором было то, что физическая постановка задачи допускала определенные возмущения правых частей. В самом деле, многие физические величины всегда известны с некоторой долей погрешности. Поэтому во многих случаях имеет смысл рассматривать дифференциальные включения вместо дифференциальных уравнений. Мы будем использовать дифференциальные включения для аппроксимации исходного эволюционного уравнения.

20.5. Аппроксимация дифференциальными включениями

Дифференциальные включения являются обобщениями дифференциальных уравнений, возникшие в начале XX-го века. Использование дифференциальных включений является очень плодотворным в теории управления, дифференциальных играх, математическом моделировании и многих других прикладных и фундаментальных направлений математики. в настоящей главе мы используем дифференциальные включения для оценки времени существования решений. Подробнее о дифференциальных включениях см. [37].

Введем функциональные пространства, в которых мы будем рассматривать эволюционные функционально-дифференциальные

включения. Мы будем рассматривать конечный временной интервал $[0, T]$, пару банаховых пространств E_0 и E_1 , при этом пространство E_1 плотно и непрерывно вложено в пространство E_0 . Теперь рассмотрим однопараметрические семейства функциональных пространств:

$$H^T = L_\infty(0, T; E_0), \quad T \in (0, T],$$

$$V^T = L_\infty(0, T; E_1), \quad T \in (0, T]$$

и

$$W^T = W_\infty^1(0, T; E_1), \quad T \in (0, T].$$

В связи с этими пространствами введем операторы сужения функций из пространства H^T на отрезок $[0, T]$

$$P_T : H^T \rightarrow H^T.$$

А также введем оператор продолжения функций из пространства V^T на отрезок $[0, T]$

$$I_T : V^T \rightarrow V^T,$$

определенный по формуле

$$w(t) = (I_T v)(t) = \begin{cases} v(t), & t \in [0, T] \\ v(T), & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Через I_0 мы будем обозначать оператор, который элементу из E_1 сопоставляет функцию-константу из пространства V^T , принимающую заданное значение.

Введем еще обозначение для замкнутого шара в пространстве H^T для любого $v_0 \in H^T$:

$$B_\delta^T(v_0) = \{v \in H^T : \|v - v_0\|_{H^T} \leq \delta\},$$

для $\delta \geq 0$.

Будем рассматривать непрерывный оператор

$$A : V^T \rightarrow H^T.$$

Введем еще оператор

$$A_T = P_T A I_T : V^T \rightarrow H^T.$$

Мы будем изучать эволюционное функционально-дифференциальное уравнение с параметром $T \in (0, T]$:

$$u'(t) = A_T u(t), \quad t \in [0, T] \tag{VII.23}$$

С этим уравнением будем также рассматривать начальное условие:

$$u(0) = \varphi \in E_1. \quad (\text{VII.24})$$

Определение 20.4. Решением задачи (VII.23)–(VII.24) при фиксированном $T \in (0, T]$ называется функция u из пространства V^T , удовлетворяющая (VII.23)–(VII.24).

При столь общих условиях на оператор A , конечно, нельзя надеяться на существование решения задачи (VII.23)–(VII.24). Однако мы будем приближать уравнение (VII.23) функционально-дифференциальным включением. Для заданного числа $\delta \geq 0$ рассмотрим функционально-дифференциальное включение

$$u'(t) \in B_\delta^T(A_T u(t)), \quad t \in [0, T]. \quad (\text{VII.25})$$

Это включение мы будем рассматривать вместе начальным условием

$$u(0) = \varphi \in E_0. \quad (\text{VII.26})$$

Определение 20.5. Для заданных $T \in (0, T]$ и $\delta \geq 0$ функция $u \in V^T$ называется решением эволюционного функционально-дифференциального включения (VII.25)–(VII.26), если u удовлетворяет (VII.25)–(VII.26).

В случае, когда $\delta = 0$ задача (VII.25)–(VII.26) совпадает с задачей (VII.23)–(VII.24).

Докажем теорему о локальной разрешимости задачи (VII.25)–(VII.26).

Теорема 20.6. Пусть начальное условие φ удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi \in E_1$$

u

$$A_T I_0 \varphi \in V^T.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое $T > 0$, что при этих δ и T существует решение задачи (VII.25)–(VII.26).

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 20.4. Возьмем число $\tau \in (0, T]$ и построим функцию из пространства V^τ по следующей формуле:

$$u^\tau(t) = P_\tau I_0 \varphi + t A_\tau I_0 \varphi.$$

В силу условий на φ мы имеем, что $u^\tau \in V^\tau$. Поэтому мы можем построить следующую функцию

$$F^\tau(t) = \left(\frac{d}{dt} - A_\tau \right) u^\tau(t).$$

Функция $F^\tau(t)$ принадлежит пространству H^τ . Более того, она имеет следующий вид

$$F^\tau(t) = P_\tau A I_0 \varphi - P_\tau A I_\tau [P_\tau I_0 \varphi + P_\tau t A I_0 \varphi].$$

Покажем, что для любого заданного положительного числа δ существует такое τ , что норма функции F^τ в пространстве H^τ меньше δ .

Введем обозначение

$$v^\tau = P_\tau I_0 \varphi + P_\tau t A I_0 \varphi.$$

Функция $I_\tau v^\tau(t)$ имеет вид

$$I_\tau v^\tau(t) = \begin{cases} \varphi + t(A\varphi)(t), & t \in [0, \tau] \\ \varphi + \tau(A\varphi)(\tau), & t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

Покажем, что $I_\tau v^\tau$ имеет пределом $I_0 \varphi$ в пространстве V^T при $\tau \rightarrow 0$. Действительно, имеем

$$\|I_\tau v^\tau - I_0 \varphi\|_{V^T} \leq \nu \tau \sup_{t \in [0, \tau]} \|t(A\varphi)(t)\|_{E_1} + \nu \tau \sup_{t \in [\tau, T]} \|\tau(A\varphi)(\tau)\|_{E_1} \leq$$

$$\tau \left(\nu \sup_{t \in [0, \tau]} \|(A\varphi)(t)\|_{E_1} + \|(A\varphi)(\tau)\|_{E_1} \right) \leq 2\tau \|A I_0 \varphi\|_{V^T}.$$

Отсюда имеем

$$\|I_\tau v^\tau - I_0 \varphi\|_{V^T} \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0. \quad (\text{VII.27})$$

Теперь мы можем оценить норму $\|F^\tau\|_{H^\tau}$ следующим образом

$$\|F^\tau\|_{H^\tau} = \|P_\tau A I_0 \varphi - P_\tau A I_\tau [P_\tau I_0 \varphi + P_\tau t A I_0 \varphi]\|_{H^\tau} \leq$$

$$\|A I_0 \varphi - A I_\tau [P_\tau I_0 \varphi + P_\tau t A I_0 \varphi]\|_{H^\tau} = \|A I_0 \varphi - A I_\tau v^\tau\|_{H^\tau}.$$

В силу (VII.27) существует такая величина

$$\alpha(\tau) \in V^T, \quad \alpha(\tau) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0,$$

что имеет место

$$\|A I_0 \varphi - A I_\tau v^\tau\|_{H^\tau} = \|A I_0 \varphi - A(I_0 \varphi + \alpha(\tau))\|_{H^\tau}.$$

Откуда в силу непрерывности оператора $A : V^T \rightarrow H^T$ следует, что существует такая величина

$$\beta(\tau) \in H^T, \quad \beta(\tau) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0,$$

что имеет место

$$\|AI_0\varphi - A(I_0\varphi + \alpha(\tau))\|_{H^T} = \|AI_0\varphi - AI_0\varphi + \beta(\tau)\|_{H^T} = \|\beta(\tau)\|_{H^T}.$$

Таким образом, нами установлено, что

$$\|F^\tau\|_{H^\tau} \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0. \quad (\text{VII.28})$$

Пусть теперь $\tau^* > 0$ таково, что $\|F^{\tau^*}\|_{H^{\tau^*}} \leq \delta$, где $\delta > 0$ — заданная величина. Тогда функция

$$u^{\tau^*}(t) = P_{\tau^*} I_0\varphi + tA_{\tau^*} I_0\varphi$$

является решением задачи (VII.25)–(VII.26) при $T = \tau^*$. \square

Заметим, что хотя в доказательстве теоремы 20.6 предъявлена в явном виде функция, являющаяся решением задачи (VII.25)–(VII.26), но полученная оценка времени существования решения задачи (VII.25)–(VII.26) является очень пессимистичным. По сути мы оцениваем лишь первый шаг простейшего метода Эйлера. В реальных доказательных экспериментах, разумеется, должны быть использованы более мощные численные методы, позволяющие оценивать время существования задачи (VII.25)–(VII.26) более точно. Смысл же теоремы 20.6 состоит в том, что она гарантирует, что всегда существует такой временной интервал, что задача (VII.25)–(VII.26) имеет решение.

20.6. Построение точных решений уравнений, описывающих волны на воде

Теперь применим полученные результаты для уравнений, описывающих динамику поверхностных волн на воде. Введем функциональные пространства в которых мы будем рассматривать наши вычисления. В качестве пространств E_0 и E_1 выберем пространства E_0^0 и E_0^q , соответственно, где $q > 0$. Оператор A мы определим следующим образом:

$$A \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' R_2 + U_2' R_1 - U_1 R_2' - U_2 R_1' \\ U_1 R_1' + U_2 R_2' - U_1' R_1 + U_2' R_2 \\ B_1' R_2 + B_2' R_1 - U_1 V_2' - U_2 V_1' + g(R_1 - 1) \\ U_1 V_1' + U_2 V_2' - B_1' R_1 + B_2' R_2 + gR_2 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 V_1 + R_2 V_2, \\ U_2 &= H[R_1 V_1 + R_2 V_2], \\ B_1 &= \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2), \\ B_2 &= \frac{1}{2}H[V_1^2 + V_2^2]. \end{aligned}$$

В качестве элементов e_k из условия 2 мы выберем следующие функции:

$$e_{klmn} = \begin{bmatrix} e^{-iku} \\ e^{-ilu} \\ e^{-imu} \\ e^{-inu} \end{bmatrix}, \quad k, l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad u \in (0, 2\pi).$$

Условие 2 будет выполнено, поскольку для операции умножения двух функций, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} e_{k_1 l_1 m_1 n_1} e_{k_2 l_2 m_2 n_2} &= e_{(k_1+k_2)(l_1+l_2)(m_1+m_2)(n_1+n_2)}, \\ k, l, m, n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

далее для оператора дифференцирования и оператора Гильберта H имеем

$$D e_{klmn} = \begin{bmatrix} -k i e^{-iku} \\ -l i e^{-ilu} \\ -m i e^{-imu} \\ -n i e^{-inu} \end{bmatrix}, \quad k, l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и

$$H e_{klmn} = \begin{bmatrix} -\text{sign}(k) i e^{-iku} \\ -\text{sign}(l) i e^{-ilu} \\ -\text{sign}(m) i e^{-imu} \\ -\text{sign}(n) i e^{-inu} \end{bmatrix}, \quad k, l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В наших экспериментах мы будем рассматривать начальные условия, которые представимы в виде конечной комбинации элементов e_{klmn} .

Обоснование для использования аппроксимации задачи (II.21) дифференциальными включениями состоит в том, что, как мы уже отмечали, в приложениях нам, как правило, не известны точные значения

функций F_1 и F_2 , поэтому вместо уравнения (II.21) следует рассматривать функционально-дифференциальные включения. Рассмотрим систему уравнений:

$$R_t(u, t) = i(U(u, t)R_u(u, t) - U_u(u, t)R(u, t)) + F_1[R, V, t](u, t) + \xi_1(u, t),$$

$$V_t(u, t) = i(U(u, t)V_u(u, t) - B_u(u, t)R(u, t)) + g(R(u, t) - 1) + F_2[R, V](u, t) + \xi_2(u, t),$$

(VII.29)

$$0 < u < 2\pi, \quad 0 < t < T,$$

$$R(0, t) = R(2\pi, t), \quad V(0, t) = V(2\pi, t), \quad 0 < t < T,$$

$$R(u, 0) = R_0(u), \quad V(u, 0) = V_0(u), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Здесь ξ_i , $i = 1, 2$ малые (в определенном смысле) функции, имеющие физический смысл случайных флуктуаций.

Мы будем рассматривать задачу нахождения следующих неизвестных:

1. T — времени существования решений системы (VII.29),
2. R и V — решений системы системы (VII.29),
3. ξ_1, ξ_2 — малых внешних воздействий.

В случае нахождения этих величин мы сможем утверждать, что на найденном временном интервале $[0, T]$ существуют такие малые внешние воздействия (ξ_1 и ξ_2), что имеют место найденные решения (R и V) системы (VII.29).

Глава VIII

Численные методы

21. Вычисление приближенных решений

21.1. Общие численные методы

Введем функциональное пространство. Через $\widetilde{W}_p^k(Q)$, $1 \leq p < \infty$, $k = 1, 2, \dots$, обозначим пополнение по норме

$$\|f\|_{\widetilde{W}_p^k(Q)} = \left(\sum_{|s_1+s_2| \leq k} \|D_u^{s_1} D_t^{s_2} f\|_{L_p(Q)}^p \right)^{1/p}$$

всех функций вида $f(u, t) = \sum_{m=-N}^N c_m(t) e^{imu}$, где функции $c_m(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до k -го порядка на отрезке $[0, T]$. Пространства $\widetilde{W}_p^k(Q)$ — подпространства пространств Соболева, удовлетворяющее условиям периодичности по переменной u . Пространства Соболева были введены в [35], пространства Соболева с периодическими условиями рассматривались, например, в [4].

В дальнейшем будем предполагать, что $R_0, V_0 \in L_1(0, 2\pi)$.

Введем функционал невязки для задачи (II.18)

$$J(R, V) = \|R_t - i(UR_u - U_u R)\|_{L_1(Q)} + \|V_t - i(UV_u - B_u R) - g(R-1)\|_{L_1(Q)} + \\ \|R|_{t=0} - R_0\|_{L_1(0, 2\pi)} + \|V|_{t=0} - V_0\|_{L_1(0, 2\pi)},$$

где функции U и B определены выше.

Лемма 21.1. Функционал J непрерывен на $\widetilde{W}_4^1(Q) \times \widetilde{W}_4^1(Q)$.

Доказательство. Пусть

$$R^k, V^k \in \widetilde{W}_1^1(Q),$$

$$\|R^k - R\|_{\widetilde{W}_1^1(Q)}, \quad k \rightarrow \infty$$

$$\|V^k - V\|_{\widetilde{W}_1^1(Q)}, \quad k \rightarrow \infty$$

В силу непрерывности оператора дифференцирования

$$D_t : \widetilde{W}_1^1(Q) \rightarrow L_1(Q)$$

имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_t^k - R_t\|_{L_1(Q)} = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|V_t^k - V_t\|_{L_1(Q)} = 0.$$

Пусть

$$W^k = \overline{R}^k V^k + \overline{V}^k R^k$$

и

$$W = \overline{R}V + \overline{V}R.$$

Эти функции принадлежат гильбертову пространству $\widetilde{W}_2^1(Q)$. В силу непрерывности операторов дифференцирования

$$D_t : \widetilde{W}_2^1(Q) \rightarrow L_2(Q)$$

и

$$D_u : \widetilde{W}_2^1(Q) \rightarrow L_2(Q),$$

теоремы Лебега о предельном переходе и неравенства Гельдера имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|W^k - W\|_{\widetilde{W}_2^1(Q)}^2 =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q (|W^k - W|^2 + |D_t W^k - D_t W|^2 + |D_u W^k - D_u W|^2) du dt = 0.$$

Представим функцию W^k в виде

$$W^k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^k(t) e^{imu},$$

где ряд сходится в пространстве $\widetilde{W}_2^1(Q)$. Применяя к W^k оператор P , мы видим, что

$$U^k = \frac{1}{2}c_0^k(t) + \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m^k(t)e^{imx}.$$

Линейный оператор P непрерывен в пространстве $\widetilde{W}_2^1(Q)$, поэтому $U^k \rightarrow U$ в $\widetilde{W}_2^1(Q)$ при $k \rightarrow \infty$.

Поскольку

$$\|U^k R_u^k\|_{L_1(Q)} \leq \|U^k\|_{L_2(Q)} \|R_u^k\|_{L_2(Q)},$$

$$\|U_u^k R^k\|_{L_1(Q)} \leq \|U_u^k\|_{L_2(Q)} \|R^k\|_{L_2(Q)},$$

то

$$U^k R_u^k \rightarrow UR_u,$$

$$U_u^k R^k \rightarrow U_u R$$

в $L_1(Q)$ при $k \rightarrow \infty$.

Аналогично доказывается, что

$$U^k V_u^k \rightarrow UV_u,$$

$$B_u^k R^k \rightarrow B_u R$$

в $L_1(Q)$ при $k \rightarrow \infty$. □

Определение 21.1. Пару функций $R^*, V^* \in \widetilde{W}_4^1(Q)$ назовем решением задачи (II.18), если $J(R^*, V^*) = 0$.

Доказательство сходимости приближенной схемы будем проводить методом минимизации невязки. При этом будут использоваться результаты теории регуляризации некорректных задач. В дальнейшем будем предполагать существование и единственность гладкого решения задачи (II.18).

Предположение 2. Пусть R_0, V_0 таковы, что существует единственное решение задачи (II.18), обозначаемое R^*, V^* , где R^* и V^* принадлежат $\widetilde{W}_2^2(Q)$.

Введем функционал

$$\Omega(R, V) = \|R\|_{\widetilde{W}_2^2(Q)}^2 + \|V\|_{\widetilde{W}_2^2(Q)}^2,$$

определенный на всем $\widetilde{W}_2^2(Q)$.

Лемма 21.2. Функционал Ω является стабилизатором для задачи (II.18), т. е. выполнены следующие условия:

- 1) $\Omega(R, V) \geq 0$;
- 2) множество

$$\Omega_M = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq M\}$$

является предкомпактным в $\widetilde{W}_4^1(Q) \times \widetilde{W}_4^1(Q)$, т. е. из любой последовательности из Ω_M можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в $\widetilde{W}_4^1(Q) \times \widetilde{W}_4^1(Q)$;

- 3) R^*, V^* принадлежат области определения Ω .

Доказательство. Пункт 1) следует из определения Ω , пункт 2) следует из теоремы Реллиха—Кондрашова о компактности вложения пространств Соболева [35], пункт 3) следует из предположения 2. \square

Приведем абстрактную приближенную схему, а потом рассмотрим способы ее конструктивной реализации.

Обозначим $\Omega^* = \Omega(R^*, V^*)$. Введем две числовые последовательности $\alpha_k > 0$, $\beta_k > 0$, $\alpha_k \rightarrow 0$, $\beta_k \rightarrow 0$. Введем множество

$$\Omega_k = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq \Omega^* + \beta_k\}.$$

Последовательность $\{R_k, V_k\}$ будем определять из условий

$$J(R_k, V_k) \leq J_k^* + \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (\text{VIII.1})$$

где $J_k^* = \inf_{\Omega_k} J(R, V)$.

Теорема 21.1. Пусть выполнено предположение 2, тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(R_k, V_k) = 0$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_k - R^*\|_{\widetilde{W}_4^1(Q)} = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|V_k - V^*\|_{\widetilde{W}_4^1(Q)} = 0.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 1, § 7, гл. 2 [5]. \square

Схема (VIII.1) является не вполне конструктивной, поскольку неизвестно значение Ω^* . Тем не менее существуют конструктивные методы

реализации этой схемы (см. п. 3, § 7, гл. 2 [5]). Для удобства читателя приведем такую схему, следуя изложению [5], для задачи (VIII.1).

Будем предполагать, что известно такое число M , что

$$\Omega(R^*, V^*) \leq M.$$

В качестве начального приближения произвольно зададим число $\gamma_0 > 0$ и функции $R_0, V_0 \in \widetilde{W}_2^2(Q)$. Пусть уже сделано $n - 1$ шагов и найдены γ_{n-1} и $R_{n-1}, V_{n-1} \in \widetilde{W}_2^2(Q)$. Положим $\gamma_n = 2^{-1}\gamma_{n-1}$, а R_n, V_n найдем как решение следующей экстремальной задачи

$$J^* = \inf_{\Omega_M} J(R, V) \leq J(R_n, V_n) \leq J^* + \gamma_n,$$

где $(R_n, V_n) \in \Omega_M$, $\Omega_M = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq M\}$.

Далее проверяем неравенство

$$J(R_n, V_n) > \gamma_n. \quad (\text{VIII.2})$$

Если неравенство (VIII.2) не выполнено, то повторяем процесс. Как показано в [5], неравенство (VIII.2) выполнится обязательно, если только $\Omega^* \neq 0$. Случай $\Omega^* = 0$ соответствует тривиальному решению, которое невозможно в задаче (II.18).

Итак, пусть при $n = N_0$ выполнено неравенство (VIII.2). Дальнейшие приближения будем искать с помощью другого итерационного процесса. Положим $\omega_{0,n} = 2^{-n}M$, $\gamma_{0,n} = 2^{-(n+1)}\gamma_{N_0}$, $n = 0, 1, \dots$,

$$\Omega_{0,n} = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) < \omega_{0,n}\}.$$

Найдем $R_{0,n}, V_{0,n}$ и $\bar{R}_{0,n}, \bar{V}_{0,n}$ как решения задач:

$$J_{0,n}^* = \inf_{\Omega_{0,n}} J(R, V) \leq J(R_{0,n}, V_{0,n}) \leq J_{0,n}^* + \gamma_{0,n},$$

$$J_M^* = \inf_{\Omega_M} J(R, V) \leq J(\bar{R}_{0,n}, \bar{V}_{0,n}) \leq J_M^* + \gamma_{0,n},$$

и при каждом $n = 0, 1, \dots$ будем проверять неравенство

$$J(R_{0,n}, V_{0,n}) - J(\bar{R}_{0,n}, \bar{V}_{0,n}) > \gamma_{0,n}.$$

Известно (см. [5]), что найдется такой номер n_k ($k = 0$), что это неравенство выполнится.

Положим $\omega_k = \omega_{k,n_k}$, $\gamma_k = \gamma_{k,n_k}$, $R_k = R_{k,n_k}$, $V_k = V_{k,n_k}$. Следующие шаги повторяются со значениями ω_{k+1} и $\gamma_{k+1,n}$:

$$\begin{cases} \omega_{k+1,n} = \omega_k + (M - \omega_k)2^{-n}, \\ \gamma_{k+1,n} = \gamma_k 2^{-(n+1)}, \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (\text{VIII.3})$$

Положим

$$\Omega_{k,n} = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq \omega_{k,n}\};$$

при фиксированном k найдем $R_{k,n}$, $V_{k,n}$, $\bar{R}_{k,n}$, $\bar{V}_{k,n}$, такие, что

$$\begin{aligned} J_{k,n}^* &= \inf_{\Omega_{k,n}} J(R, V) \leq J(R_{k,n}, V_{k,n}) \leq J_{k,n}^* + \gamma_{k,n}, \\ J_M^* &= \inf_{\Omega_M} J(R, V) \leq J(\bar{R}_{k,n}, \bar{V}_{k,n}) \leq J_M^* + \gamma_{k,n}, \end{aligned} \quad (\text{VIII.4})$$

и при каждом $n = 0, 1, \dots$ будем проверять неравенство

$$J(R_{k,n}, V_{k,n}) - J(\bar{R}_{k,n}, \bar{V}_{k,n}) > \gamma_{k,n}.$$

После того как будет найден n_k , пересчитываем по схеме (VIII.3)–(VIII.4). Последовательность R_k, V_k сходится к решению в смысле теоремы 21.1.

Нами была описана схема для вычисления приближенного решения. Однако эта схема требует находить условный экстремум функционала, что является технически сложной задачей. Сейчас мы опишем эффективную реализацию решения задачи (VIII.4). Для этого будем использовать аппроксимацию решения гладкими сплайнами.

Пусть в области Q задан конечный набор несовпадающих точек x_1, x_2, \dots, x_N , и в каждой точке x_i задано число y_i . Поставим задачу отыскания интерполяционных сплайн-функций $\sigma \in \widetilde{W}_2^2(Q)$ из условия

$$\min_{\sigma(x_i)=y_i} \left\{ \int_Q (|\sigma_{uu}|^2 + 2|\sigma_{ut}|^2 + |\sigma_{tt}|^2) du dt \right\}. \quad (\text{VIII.5})$$

Задача (VIII.5) имеет единственное решение, более того, существует очень эффективные методы построения сплайна σ по набору точек $\{(x_i, y_i)\}$ (см. [1], [4]).

Для каждого $N > 0$ зафиксируем определенную систему точек $S_N = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \bar{Q}$ таким образом, чтобы S_N образовывала ϵ_N -сеть, $\epsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Через Θ_N обозначим множество всех сплайн-функций, построенных на сетке S_N . По определению $\Theta_N \subset \widetilde{W}_2^2(Q)$. Введем отображение

$$Q_N : \widetilde{W}_2^2(Q) \rightarrow \Theta_N$$

по следующему правилу: функция из $\widetilde{W}_2^2(Q)$ сужается на сетку S_N , что возможно в силу теоремы вложения Соболева, а затем строится сплайн по правилу (VIII.5). Для любой функции $f \in \widetilde{W}_2^2(Q)$ имеет место (см. § 4.3 [4])

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - Q_N f\|_{\widetilde{W}_2^2(Q)} = 0. \quad (\text{VIII.6})$$

Функциональное пространство Θ_N является конечномерным, а следовательно, пригодным для проведения вычислений. Покажем, что с помощью аппарата сплайнов можно осуществить аппроксимацию полученных экстремальных задач.

Рассмотрим задачу поиска минимизирующей последовательности для задачи

$$\inf_{\widetilde{W}_2^2(Q)} J(R, V) = 0. \quad (\text{VIII.7})$$

Введем последовательность конечномерных задач

$$I_N^* = \inf_{\Theta_N} J(R, V), \quad N = 1, 2, \dots \quad (\text{VIII.8})$$

Теорема 21.2. *Последовательность задач (VIII.8) аппроксимирует задачу (VIII.7) по функции, т. е. $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N^* = 0$.*

Доказательство. Пусть $R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q)$, тогда в силу леммы 21.1 и (VIII.6) имеет место

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (J(Q_N(R), Q_N(V)) - J(R, V)) = 0.$$

Из этого равенства по теореме 1.1, гл. 3 [5] следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N^* = 0.$$

□

Решение задачи (VIII.8) при фиксированном N может быть эффективно найдено следующим образом. Сначала находим с помощью разностных методов решение задачи (II.18) (см. [11]), а затем по значениям в узлах сетки строим сплайн. Нужной точности решения задачи (VIII.8) всегда можно добиться выбором соответствующей сетки.

Итак, пусть найдено приближенное решение R_N, V_N задачи (VIII.7). Представим это приближенное решение в виде рядов

$$R_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^k(t) e^{iuk},$$

$$V_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v^k(t) e^{iuk}.$$

Нам нужно решать задачи типа (VIII.7) с ограничениями

$$\Omega(R_N, V_N) \leq M. \quad (\text{VIII.9})$$

Если неравенство (VIII.9) не выполнено для решения задачи (VIII.7), тогда получим решение задачи (VIII.7), (VIII.9) с помощью операторов $T_M : \widetilde{W}_2^2(Q) \rightarrow \widetilde{W}_2^2(Q)$ по формуле

$$T_M \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-iku} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k f_k e^{-iku},$$

где коэффициенты λ_k равны единице при малых $|k|$ и быстро убывают при больших $|k|$. В силу гладкости решений коэффициенты r^k, v^k убывают по соответствующим нормам достаточно быстро с ростом $|k|$. Следовательно, оператор T_M можно выбрать таким образом, чтобы удовлетворить условию (VIII.9).

21.2. Регуляризация ошибок машинной арифметики

Погрешности округлений при вычислениях являются принципиальной проблемой вычислительной математики. Одним из возможных способов преодоления трудностей проведения вычислений в условиях машинной точности является применение методов интервального анализа (см., например, [2, 18]). Однако использование интервального исчисления требует специального программирования численных методов, снижает скорость вычислений и требует увеличения объема оперативной памяти. В настоящей работе предложен один простой и эффективный способ «борьбы» с особенностями машинной точности. Этот способ является одним из вариантов спектрального фильтра. В то же время предлагаемый метод можно трактовать, как регуляризацию некорректных задач по методу квазирешений. По сравнению с другими спектральными фильтрами этот метод является более эффективным в рассматриваемых задачах. Разумеется, предложенный подход может

быть эффективным лишь в некоторых вычислительных задачах. В настоящей работе рассматривается применение численных методов для получения приближенных решений систем уравнений, описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью, где с помощью нашего подхода удалось получить важные результаты в задачах океанологии и математической гидродинамики.

Мы используем методы прямых для сведения уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная после дискретизации по пространственным переменным система обыкновенных уравнений решается стандартным методом Рунге—Кутты 4-го порядка. При вычислении правых частей этих уравнений возникают основные погрешности вычислений. В настоящем параграфе мы рассматриваем модификацию метода прямых, позволяющую в ряде случаев избежать вычислительной неустойчивости.

Необходимо отметить, что предлагаемый метод не в полной мере подавляет численную неустойчивость в задачах гидродинамики со свободной поверхностью, а лишь «продлевает жизнь» численной схеме.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим в H , вообще говоря, нелинейный оператор A , определенный на подпространстве $\mathcal{D} \subset H$. Предположим, что в H можно выбрать ортонормированный в H базис $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}$.

Будем рассматривать абстрактную задачу Коши

$$\begin{aligned} u'(t) &= A[u(t)], \quad t \in [0, T], \\ u(0) &= \psi, \quad \psi \in H. \end{aligned} \tag{VIII.10}$$

Определение 21.2. Функция $u \in C^1([0, T]; H)$, удовлетворяющая (VIII.10) и такая, что $u(t) \in \mathcal{D}$ при $t \in [0; T]$, называется *решением* задачи (VIII.10).

Рассмотрим проекционный метод сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для задачи (VIII.10). Для конечного N введем проектор $P_N : H \rightarrow H$ по формуле

$$P_N \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k.$$

При фиксированном N будем рассматривать функцию

$$u^N(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^N(t) \varphi_k,$$

при $\alpha_k^N \in C^1[0, T]$, являющуюся решением задачи Коши

$$\begin{aligned} (u^N)'(t) &= P_N(\mathcal{A}[u(t)]), \quad t \in [0, T], \\ u^N(0) &= P_N\psi. \end{aligned} \tag{VIII.11}$$

Функция u^N полностью определяется вектор-функцией

$$\alpha^N(t) = (\alpha_1^N(t), \dots, \alpha_N^N(t))^T.$$

Перепишем задачу (VIII.11) в виде системы N -го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений относительно α^N . Обозначим

$$F(\alpha^N) = (F_1(\alpha^N), \dots, F_N(\alpha^N))^T,$$

где

$$F_k(\alpha^N(t)) = \left(\mathcal{A}\left[\sum_{i=1}^N \alpha_i^N(t)\varphi_i\right], \varphi_k \right)_H.$$

Будем рассматривать следующую систему уравнений, эквивалентную (VIII.11):

$$\begin{aligned} (\alpha^N)'(t) &= F(\alpha^N(t)), \quad t \in [0, T], \\ \alpha^N(0) &= \psi^N, \end{aligned} \tag{VIII.12}$$

где

$$\begin{aligned} \psi^N &= (\psi_1, \dots, \psi_N)^T, \\ \psi_k &= (\psi, \varphi_k)_H. \end{aligned}$$

Правую часть в уравнении (VIII.12) можно трактовать как функцию $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Приведем схему Рунге—Кутты 4-го порядка для системы (VIII.12). Через τ обозначим шаг по переменной t . Соответственно, $t_m = m\tau$, $m = 0, \dots, M$. Будем предполагать, что на рассматриваемом интервале существует единственное решение задачи (VIII.12). Численные

решения будем получать по следующей формуле:

$$\begin{aligned}\alpha^N(t_m) &= \alpha^N(t_{m-1}) + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= F(\alpha^N(t_{m-1})), \\ k_2 &= F(\alpha^N(t_{m-1}) + \frac{\tau}{2}k_1), \\ k_3 &= F(\alpha^N(t_{m-1}) + \frac{\tau}{2}k_2), \\ k_4 &= F(\alpha^N(t_{m-1}) + \tau k_3), \\ m &= 1, \dots, M.\end{aligned}\tag{VIII.13}$$

В реальности при вычислениях на ЭВМ по схеме (VIII.13), как правило, возникают ошибки в силу ограниченной машинной точности. Основным источником ошибок — вычисление функции F . Элементы вектора α^N трактуются как коэффициенты ряда Фурье, поэтому погрешности в вычислении этой функции могут повлечь катастрофические последствия для проведения расчетов. Типичной является ситуация, когда по модулю эти коэффициенты быстро стремятся к нулю. При этом приходится проводить вычисления с числами по модулю значительно меньшими гарантированных значащих цифр. Вычисляя по схеме (VIII.13), мы наблюдаем значения $\tilde{\alpha}^N$, которые связаны с точными значениями следующим соотношением:

$$|\alpha^N(t_m) - \tilde{\alpha}^N(t_m)| = \delta_m^N, \quad m = 1, \dots, M.$$

Конкретные значения $\tilde{\alpha}^N(t_m)$ зависят от реализации счета по схеме (VIII.13). Мы будем говорить, что последовательность $\alpha^N(t_m)$ является вычислительно неустойчивой, если числовая последовательность δ_m^N не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. В этом случае относительная погрешность вычисления α^N быстро стремится к бесконечности при $N \rightarrow \infty$.

В ситуации вычислительной неустойчивости мы не можем произвольно увеличивать число N , а должны согласовывать его с уровнем ошибок вычислений. Это стандартная ситуация в теории некорректных задач. Выбор размерности аппроксимирующей системы (числа N) оптимальным образом представляет собой трудную задачу. Предложим простой алгоритм, который позволит нам обеспечивать выбор N близким к оптимальному.

Пусть выбрано число $q > 0$. Введем функцию $R_q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ по формуле

$$R_q(x_1, x_2, \dots, x_N) = (r_q(x_1), r_q(x_2), \dots, r_q(x_N)),$$

где

$$r_q(x) = \begin{cases} x, & |x| > q \\ 0, & |x| \leq q \end{cases}.$$

Величины α^N будем рассчитывать по формуле

$$\alpha^N(t_m) = R_q(\alpha^N(t_{m-1}) + \tau/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)). \quad (\text{VIII.14})$$

Величины k_1, k_2, k_3, k_4 вычисляются согласно схеме (VIII.13). Выбор параметра $q > 0$ осуществляется из эмпирических соображений. Имеет смысл выбирать q на порядок больше чем максимальное из значений δ_m .

Использование формулы (VIII.14) не вызывает сложности при программировании предлагаемой процедуры.

Покажем, что алгоритм, задаваемый формулой (VIII.14), является одной из реализаций метода квазирешений в теории регуляризации некорректных задач. Сделаем следующие предложения о разрешимости задач (VIII.10), (VIII.12).

Условие 4. Пусть существует $T > 0$ такое, что:

1. при $t \in [0, T]$ существует единственное решение задачи (VIII.10).
2. решение задачи (VIII.10) принадлежит пространству $C^2([0, T]; D_1)$, где множество D_1 компактно в D .
3. для достаточно больших N при $t \in [0, T]$ существует единственное решение задачи (VIII.11) и это решение принадлежит пространству $C^2([0, T]; D_1)$.

Методы, позволяющие проверить выполнение условий 4, получены в работах [41, 42].

Введем функционал невязки для задачи (VIII.10) по формуле

$$J(u) = \|u' - A[u]\|_{C([0, T]; H)}^2 + \|u(0) - \psi\|_H^2.$$

Легко можно убедиться, что функционал

$$J : C^1([0, T]; D) \rightarrow \mathbb{R}$$

является непрерывным. Функция $u \in C^1([0, T]; \mathcal{D})$ является решением задачи (VIII.10) тогда и только тогда, когда $J(u) = 0$.

В условии 4 задача нахождения приближенных решений задачи (VIII.10) может быть сведена к задаче нахождения последовательности u^N , минимизирующей функционал J на множестве $C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)$. Строить минимизирующую последовательность можно с помощью решений задачи (VIII.11).

Теорема 21.3. Пусть выполнено условие 4. Тогда имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J(u^N) = 0,$$

где u^N суть решения задачи (VIII.11). Более того,

$$\|u^N - u^*\|_{C^1([0, T]; \mathcal{D})} \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$, где u^* — решение задачи (VIII.10).

Доказательство. Подставим приближенные решения u^N в функционал невязки

$$\begin{aligned} J(u^N) &= \|(u^N)' - \mathcal{A}[u^N]\|_{C([0, T]; H)}^2 + \|u^N(0) - \psi\|_H^2 = \\ &= \|(u^N)' - P_N \mathcal{A}[u^N] - (I - P_N) \mathcal{A}[u^N]\|_{C([0, T]; H)}^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi_k|^2 = \\ &= \|(I - P_N) \mathcal{A}[u^N]\|_{C([0, T]; H)}^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi_k|^2. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в последней сумме стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Рассмотрим величину

$$\|(I - P_N) \mathcal{A}[u^N]\|_{C([0, T]; H)}^2 = \max_{t \in [0, T]} \sum_{k=N+1}^{\infty} |(\mathcal{A}[u^N], \varphi_k)_H|^2. \quad (\text{VIII.15})$$

Так как при всех $t \in [0, T]$ имеем $u^N(t) \in \mathcal{D}_1$, то в силу компактности \mathcal{D}_1 в \mathcal{D} и непрерывности оператора $\mathcal{A} : \mathcal{D} \rightarrow H$ получаем, что множество $\mathcal{A}[u^N(t)]$ ограничено в H равномерно по N и $t \in [0, T]$. Поэтому величина (VIII.15) также стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

В силу компактности вложения пространства

$$C^2([0, T]; \mathcal{D}_1) \subset C^1([0, T]; \mathcal{D})$$

последовательности u^N можно извлечь подпоследовательность u^{N_l} , сходящуюся в $C^1([0, T]; \mathcal{D})$. Легко видеть, что ее пределом является единственное решение задачи (VIII.10) — функция u^* . Действительно, из непрерывности функционала J следует, что

$$J\left(\lim_{N_l \rightarrow \infty} u^{N_l}\right) = \lim_{N_l \rightarrow \infty} J(u^{N_l}) = 0.$$

В самом деле, покажем, что сама последовательность решений u^N сходится к u^* . Пусть

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u^*\|_{C^1([0, T]; \mathcal{D})} = \lim_{N_q \rightarrow \infty} \|u^{N_q} - u^*\|_{C^1([0, T]; \mathcal{D})}.$$

В силу компактности в $C^1([0, T]; \mathcal{D})$ подпоследовательности u^{N_q} можно считать, что эта подпоследовательность имеет пределом v^* . Но тогда v^* тоже будет решением задачи (VIII.10), а значит, имеем $v^* = u^*$. В итоге получаем, что

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u^*\|_{C^1([0, T]; \mathcal{D})} = 0.$$

Следовательно, имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u^*\|_{C^1([0, T]; \mathcal{D})} = 0.$$

□

Теорема 21.3 является обоснованием известного в теории регуляризации некорректных задач метода квазирешений. В этой теореме рассматривается последовательность решений задач (VIII.11), однако вместо функций u^N , которые на практике недостижимы, можно рассматривать различные приближения в пространстве $C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)$. Эти приближения можно получать с помощью метода Рунге—Кутты (VIII.13) и подходящего метода интерполяции по переменной t .

Пусть фиксировано достаточно большое N . Через u^{NM} обозначим последовательность полученную по схеме (VIII.13) по M точкам и последующим интерполированием с использованием стандартных кубических сплайнов по узлам $\{t_m\}$. Соответственно, через u_q^{NM} , $q > 0$, обозначим аналогичную последовательность, полученную по схеме (VIII.14).

Теорема 21.4. *Допустим, что имеет место условие 4. Предположим также, что $u^{NM}, u_q^{NM} \in C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)$ и*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|u^{NM} - u^N\|_{C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)} = 0$$

при фиксированном N . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют N, M такие, что

$$J(u^{NM}) < \varepsilon,$$

также существуют (возможно, другие) N, M и $q > 0$ такие, что

$$J(u_q^{NM}) < \varepsilon.$$

Доказательство. По утверждению теоремы 21.3 существует такой номер N_0 , что $J(u^N) < \varepsilon/2$ для всех $N \geq N_0$. Введем обозначение

$$\Delta^{NM} = u^{NM} - u^N.$$

Из предположений теоремы следует, что

$$\Delta^{NM} \in C^2([0, T]; \mathcal{D}_1).$$

Заметим, что по построению $u^{NM}(0) = u^N$. Имеем

$$J(u^{N_0M}) = J(u^{N_0} + \Delta^{N_0M}) =$$

$$\begin{aligned} & \| (u^{N_0})' - \mathcal{A}[u^{N_0} + \Delta^{N_0M}] + (\Delta^{N_0M})' \|_{C([0, T]; H)}^2 + \| u^{N_0}(0) - \psi \|_H^2 \leq \\ & \| (u^{N_0})' - \mathcal{A}[u^{N_0} + \Delta^{N_0M}] \|_{C([0, T]; H)}^2 + \| (\Delta^{N_0M})' \|_{C([0, T]; H)}^2 + \| u^{N_0}(0) - \psi \|_H^2. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \| \Delta^{N_0M} \|_{C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)} = 0$$

и в силу непрерывности оператора $\mathcal{A} : \mathcal{D} \rightarrow H$ существует такое M_0 , что при всех $M \geq M_0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \| (\Delta^{N_0M})' \|_{C([0, T]; H)}^2 \leq \varepsilon/4, \\ & | J(u^{N_0}) - \| (u^{N_0})' - \mathcal{A}[u^{N_0} + \Delta^{N_0M}] \|_{C([0, T]; H)}^2 | \leq \varepsilon/4. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $N > N_0$ и $M > M_0$ имеем

$$J(u^{NM}) \leq \varepsilon.$$

Пусть теперь N_1 и M_1 таковы, что $J(u^{N_1M_1}) < \varepsilon/2$. Обозначим

$$\Delta_q^{NM} = u_q^{NM} - u^{NM}.$$

По построению функций u_q^{NM} и в силу свойств кубических сплайнов имеем

$$\lim_{q \rightarrow 0} \| \Delta_q^{NM} \|_{C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)} = 0.$$

Оценим значение функционала $J(u_q^{N_1 M_1})$. Можно видеть, что в силу непрерывности функционала $J : C^1([0, T]; \mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ существует такое $q_0 > 0$, что для всех $q < q_0$ имеем

$$|J(u^{N_1 M_1}) - J(u_q^{N_1 M_1})| = |J(u^{N_1 M_1}) - J(u^{N_1 M_1} + \Delta_q^{N_1 M_1})| < \varepsilon/2.$$

Следовательно, при всех $N > N_1$, $M > M_1$, $q < q_0$ выполнено неравенство

$$J(u_q^{NM}) \leq \varepsilon.$$

□

Теорема 21.4 дает возможность строить минимизирующую последовательность для функционала J с помощью приближений u_q^{NM} , которые можно строить конструктивно. А теорема 21.3 гарантирует, что минимизирующая последовательность сходится к решению задачи (VШ.10). В конкретных приложениях условия теорем 21.3, 21.4 часто могут быть легко проверены. В частности, в задачах гидродинамики со свободной поверхностью, которые мы рассматриваем, эти условия выполнены.

Для демонстрации эффективности предлагаемого метода приведем результаты двух вычислительных экспериментов.

Численный эксперимент 1. Рассмотрим стоячие волны идеальной жидкости с конечной глубиной. Выберем следующие параметры: глубина $h = 6,0$, ускорение свободного падения $g = 1,0$, шаг по времени $\tau = 0,001$. В качестве начальных условий возьмем следующие функции:

$$y(0, u) = 0,01 \cos u, \quad \Psi(0, u) = 0.$$

Аппроксимируем ряды (4.4) конечными суммами с $N = 512$ слагаемыми и будем применять численные схемы, описанные выше. Мы будем рассматривать спектры решений в логарифмическом масштабе: по оси абсцисс будем откладывать номер гармоники k , а по оси ординат — $\lg |y_k|$ и $\lg |\Psi_k|$. В этом эксперименте расчет проводился по схеме (VШ.13) — на рис. VШ.1 показан спектр решения при $t = 20,0$.

Гармоники с номерами от 0 до 25 характеризуют собственно решение, горизонтальная часть спектра с гармониками от 26 до 360 обусловлена конечностью машинной точности при вычислениях. Растущая часть спектра с гармониками от 360 до 511 — результат вычислительной неустойчивости схемы (VШ.13) в условиях машинной точности.

В этом численном эксперименте применялась модифицированная схема метода прямых (VШ.14), с выбранным $q = 10^{-12}$, с теми же

начальными условиями. На рис. VIII.2 показан спектр решения при $t = 100, 0$.

В отличие от случая на рис. VIII.1, здесь мы не наблюдаем вычислительной неустойчивости.

Численный эксперимент 2. Для проведения численных расчетов будем использовать метод прямых, принимая $N = 512$. Выберем следующие параметры: ускорение свободного падения $g = -10, 0$, шаг по времени $\tau = 0, 0001$. В качестве начальных условий возьмем следующие функции:

$$R(0, \omega) = 1 + 0, 01 \exp(-i\omega), \quad V(0, \omega) = 0.$$

Проведем результаты численного эксперимента, где расчет проводился по схеме (VIII.13). На рисунке VIII.3 показан спектр решения при $t = 0, 3$.

Первые гармоники от 0 до 10 характеризуют решение, а возрастающие по модулю гармоники (от 10) выражают факт неустойчивости. В данном примере мы сталкиваемся с неустойчивостью самих уравнений. Возникающие погрешности вычислений быстро разрушают численный счет.

В этом численном эксперименте проверим нашу модифицированную схему (VIII.14) в этом случае с параметром $q = 10^{-12}$. На рис. VIII.4 показан спектр решения при $t = 1, 55$.

Здесь мы не наблюдаем какой-либо вычислительной неустойчивости. Разумеется, дальнейший счет по схеме (VIII.14) требует увеличения размерности N и приводит к разрушению гладкого решения, но это следствие неустойчивости течения Релея—Тейлора. На рисунке VIII.5 показан профиль свободной поверхности течения при $t = 1, 55$.

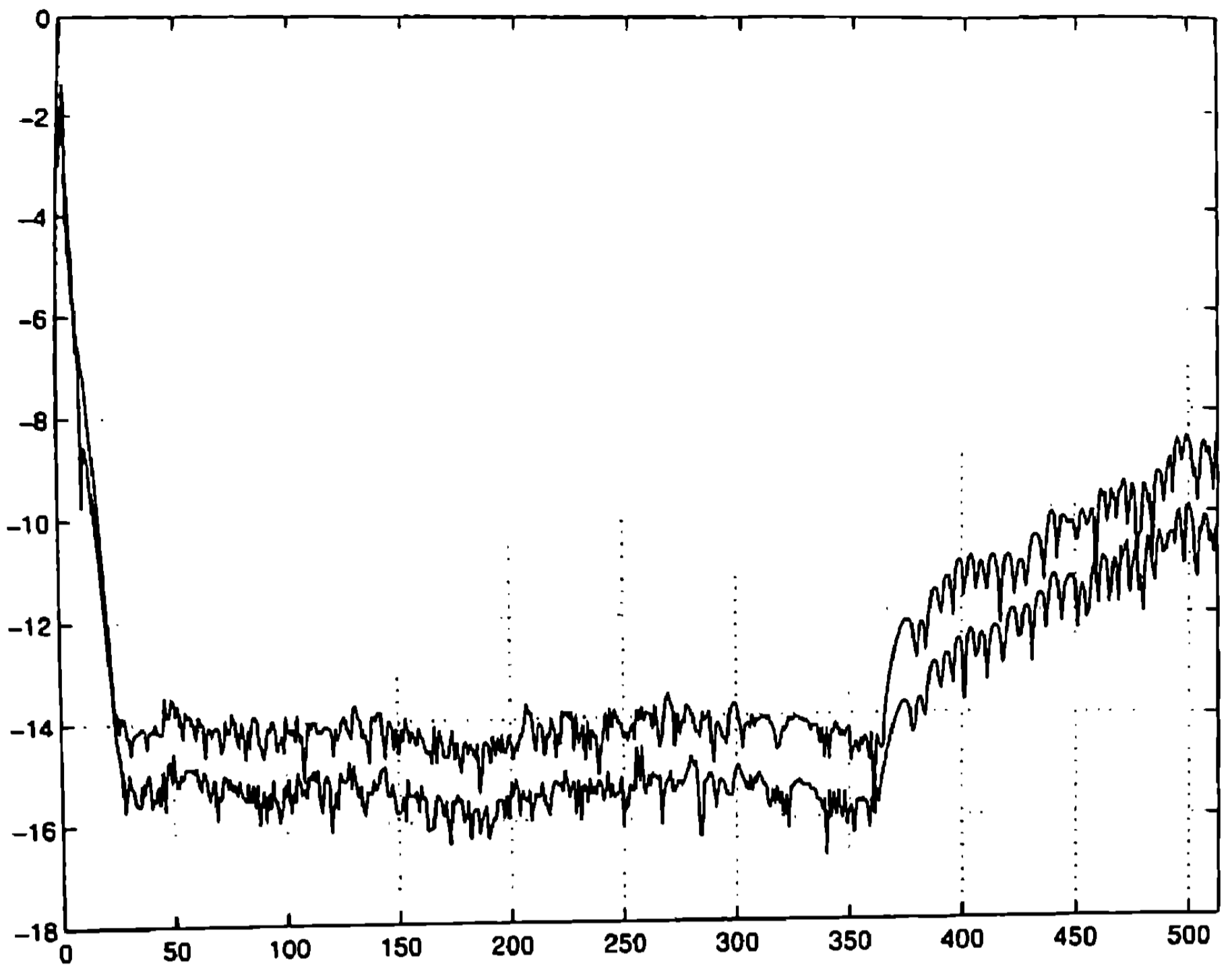


Рис. VIII.1. Счет по схеме (VIII.13), $t = 20, 0$

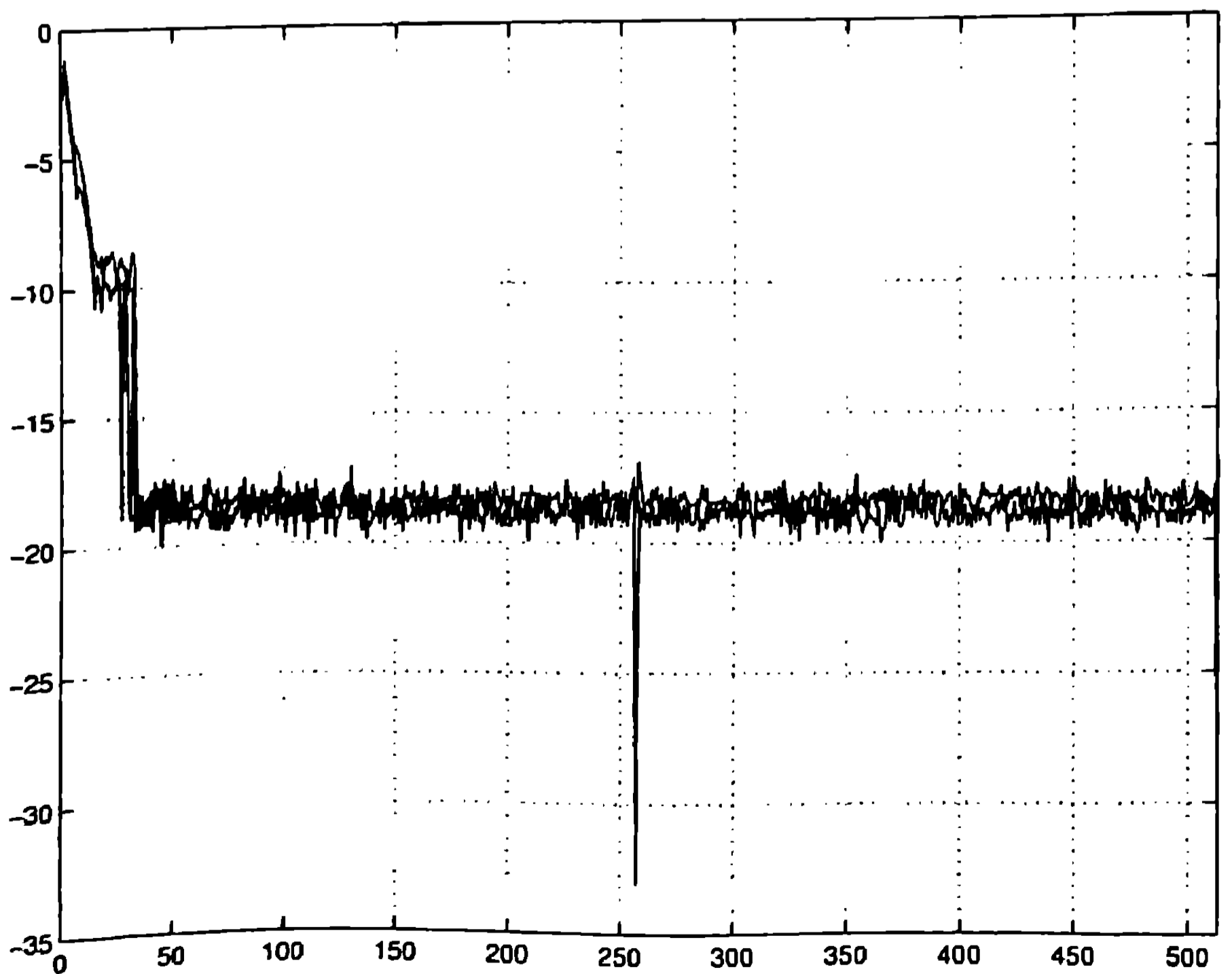


Рис. VIII.2. Счет по схеме (VIII.14), $t = 100, 0$

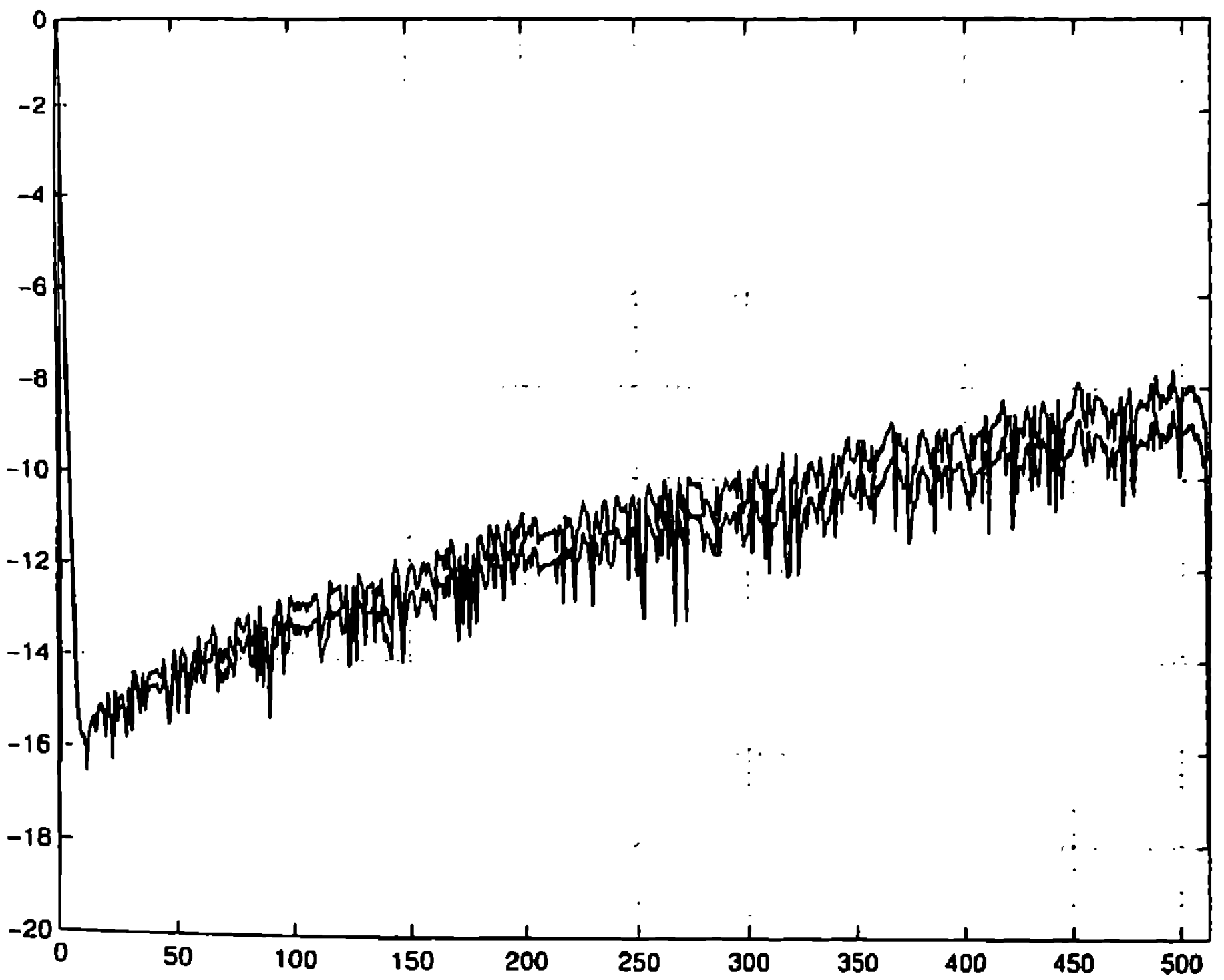


Рис. VIII.3. Счет по схеме (VIII.13), $t = 0,3$

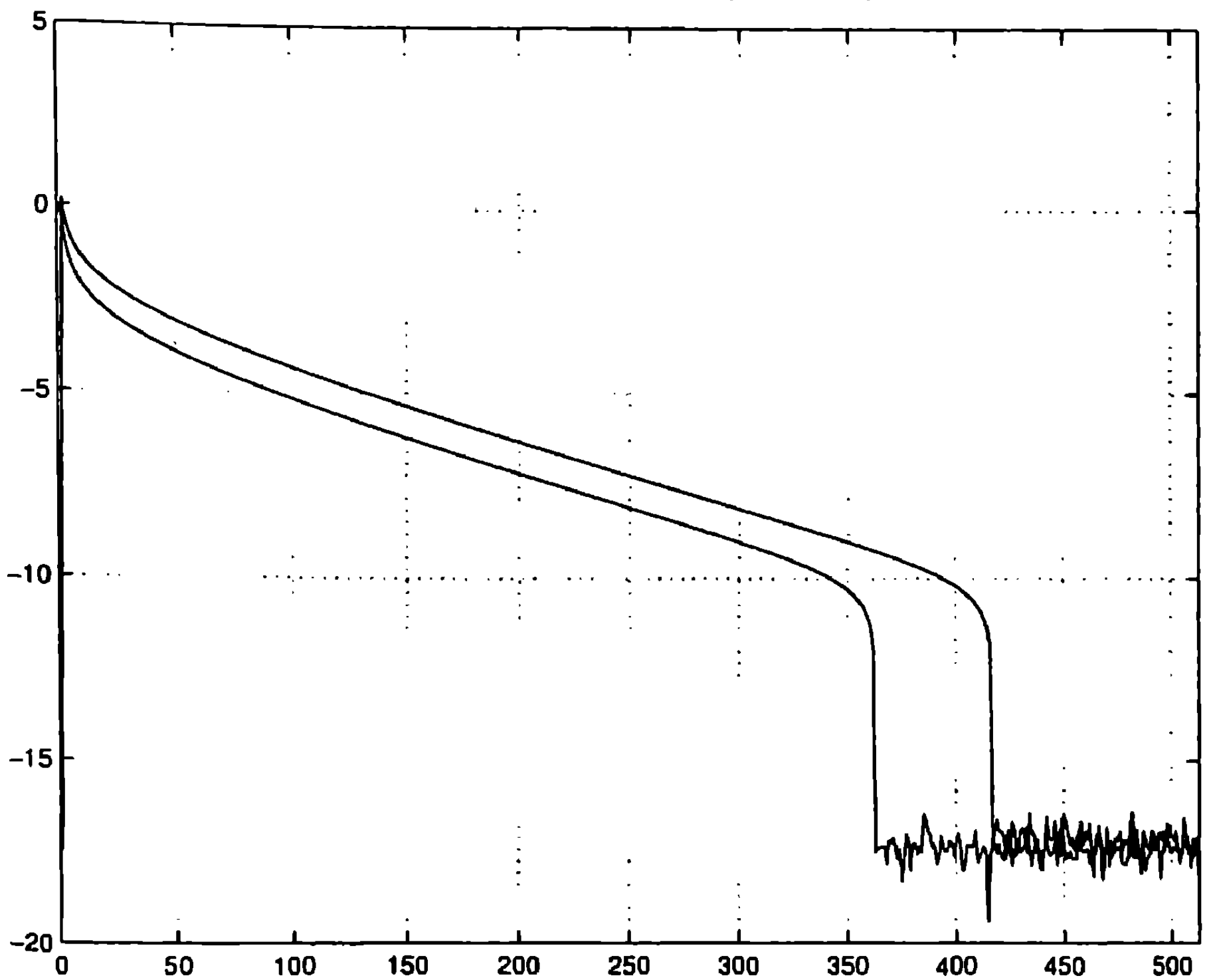


Рис. VIII.4. Счет по схеме (VIII.14), $t = 1,55$

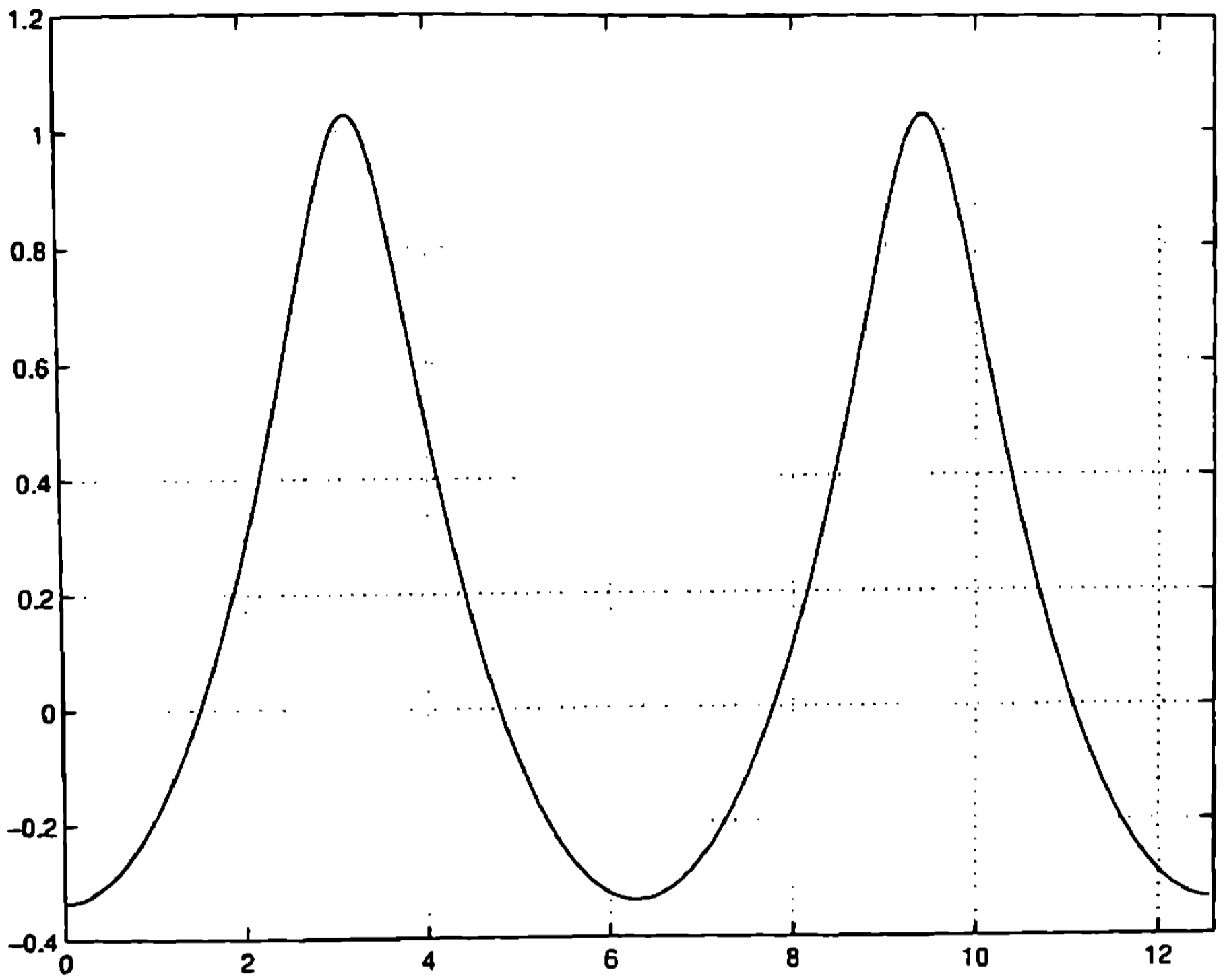


Рис. VIII.5. Профиль свободной поверхности при $t = 1,55$

21.3. Конструктивное определение времени существования решений

При изучении вопросов разрешимости задачи (II.18) мы игнорировали проблемы связанные с тем, что решения задачи (II.18) представляют свободную поверхность в параметрическом виде. При изучении этих уравнений возникает теоретическая проблема, состоящая в том, что уравнения могут допускать гладкие решения имеющие самопересекающийся профиль свободной поверхности. Весьма часто задачу (II.18) аппроксимируют задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае мы покажем, что можно конструктивно оценивать время на котором наше решение остается физическим, т.е. свободная поверхность не имеет самопересечений.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область (ограниченная или нет) с кусочно-гладкой границей. Пусть $I = [0, T]$ — ограниченный отрезок на котором будем рассматривать следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} z'(t) &= f(z(t), t), & t \in (0, T], \\ z(0) &= z_0, & z_0 \in Q, \end{aligned} \quad (\text{VIII.16})$$

где $f : Q \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — заданная функция. Относительно функции f будем предполагать, что она непрерывна и удовлетворяет условию:

$$|f(z, t)| \leq M(|z| + 1), \quad z \in Q, t \in [0, T], \quad (\text{VIII.17})$$

где $M > 0$ не зависит от z и t . Будем также предполагать, что по переменной z в \bar{Q} функция f удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(z_1, t) - f(z_2, t)| \leq L|z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in Q. \quad (\text{VIII.18})$$

Через $L(0, T; \mathbb{R}^n)$ обозначим множество непрерывных кусочно-линейных функций, заданных на $[0, T]$ со значениями в \mathbb{R}^n . Очевидно, что $L(0, T; \mathbb{R}^n) \subset W_\infty^1(0, T; \mathbb{R}^n)$.

Совместно с задачей (VIII.16) будем рассматривать функционал P , принимающий лишь три значения $\{0, 1, 2\}$:

$$P : \prod_{k=1}^n W_\infty^1(0, T; \mathbb{R}^n) \times [0, T] \rightarrow \{0, 1, 2\}.$$

На функционал P мы наложим следующие условия:

Условие 5. Для любой вектор-функции $z(t)$ $P[z, 0] = 0$ и $P[z, t'] = 2$ только при условии, что $t' = T$ или $z(t') \in \partial Q$. Также будем предполагать, что при фиксированном z функционал монотонный по t .

Условие 6. Функционал P не зависит от будущего, т.е. для любого $t' \in [0, T]$ значение $P[z, t']$ не зависит от значений функции $z(t)$ при $t > t'$.

Мы будем говорить, что в момент $t_1 \in [0, T]$ произошло переключение на функции z , если $t_1 = \inf\{t \in (0, T] : P[z, t] > 0\}$, также мы будем говорить, что для z до момента $t' \in [0, T]$ не было переключения, если $P[z, t'] = 0$.

Условие 7. Для любой последовательности z^N сходящейся к решению z задачи (VIII.16) в $W_\infty^1(0, T; \mathbb{R}^n)$ моменты переключения t_1^N для функций z^N сходятся к моменту переключения t_1 для функции z .

Из известных теорем о разрешимости задачи Коши получаем, что задача (VIII.16) имеет единственное в \bar{Q} решение на $[0, T]$, $T \leq T$. Основная задача, рассматриваемая в статье состоит в вычислении момента переключения для заданного начального условия, при условии, что на $(0, T]$ происходит переключение.

Продолжим функцию $f(z, t)$ в $\mathbb{R}^n \times [0, 2T]$ с сохранением непрерывности и условий (VIII.17) и (VIII.18), возможно с другими константами M_1 и L_1 . Это продолжение обозначим через F , и будем рассматривать задачу Коши:

$$\begin{aligned} z'(t) &= F(z(t), t), & t \in (0, 2T], \\ z(0) &= z_0, & z_0 \in Q. \end{aligned} \quad (\text{VIII.19})$$

Если исходная задача (VIII.16) имеет решение в \bar{Q} на $[0, T]$, то на этом отрезке решение задач (VIII.16) и (VIII.19) совпадают. Поэтому для решения задачи (VIII.19) мы сохраняем обозначение $z(t)$.

Для $N \geq 1$ определим точки $t_k^N = kh^N$, $h^N = \frac{T}{N}$, $t_k^N \in [0, T]$, $k = 0, \dots, N$. При фиксированных f и z_0 определим последовательность в \mathbb{R}^n по схеме Эйлера

$$\begin{aligned} z_0^N &= z_0, \\ z_k^N &= z_{k-1}^N + h^N f(z_{k-1}^N, t_{k-1}^N), & k = 1, \dots, N_T, \end{aligned} \quad (\text{VIII.20})$$

где N_T такое, что $z_j^N \in \bar{Q}$, $j = 1, \dots, N_T$ и либо $N_T = N$, либо $z_{j+1}^N \notin \bar{Q}$. Обозначим через $z^N(t)$ кусочно-линейную функцию, построенную по точкам (z_k^N, t_k^N) , $k = 1, \dots, N_T$ с помощью линейной интерполяции. Определим числовую последовательность

$$T_N = \max\{t_k^N : P[z^N, t_k^N] = 0, k = 0, \dots, N_T\}. \quad (\text{VIII.21})$$

Теорема 21.5. Пусть выполнены условия 5–7. Для любого $0 < \tau < T$ существует такой $N = N(\tau)$, что на $[0, T_N]$ не происходит переключения на решении z , и $P[z, \min\{T_N + \tau, T\}] > 0$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ непрерывная на $[0, T]$ функция $g(t)$ называется ε -решением задачи (VIII.19), если:

1. g имеет непрерывную производную в $[0, T]$ за исключением конечного числа точек — S ;
2. при $t \in [0, T] \setminus S$ имеет место

$$|g'(t) - F(g(t), t)| \leq \varepsilon.$$

Для задачи VIII.19 можно определить процесс Эйлера (VIII.20) для $k = 0, \dots, 2N$. По теореме 1.1, гл. 1 [19] для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение N_ε , что $z^{N_\varepsilon}(t)$ будет ε -решением задачи (VIII.19). А в силу теоремы 2.1, гл. 1 [19] для этого ε -решения имеет место оценка:

$$|z(t) - z^{N_\varepsilon}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{L_1}(e^{L_1 t} - 1). \quad (\text{VIII.22})$$

Последовательность z^N сходится к z в пространстве $W_\infty^1(0, 2T; \mathbb{R}^n)$, действительно,

$$\begin{aligned} |(z^N)'(t) - z'(t)| &= |F(z^N(t), t) + \Delta^N(t) - F(z(t), t)| \\ &\leq L_1|z^N(t) - z(t)| + |\Delta^N(t)|, \end{aligned}$$

где $\Delta^N(t)$ — невязка для ε -решения, по определению ε -решения имеем $|\Delta^N(t)| \leq \varepsilon$. Поэтому отсюда и из оценки (VIII.22) получаем

$$\|z^N - z\|_{W_\infty^1(0, T; \mathbb{R}^n)} \leq C\varepsilon,$$

где $C > 0$ не зависит от N .

Пусть t_1^N — момент переключения t_1^N для функции z^N . В силу условия 5 имеем оценку $t_1^N - T_N < h^N$. Поскольку $h^N = \frac{T}{N}$, то для достаточно большого N для любого $\tau > 0$ будет выполнено $\tau < h^N$. \square

В качестве первого примера рассмотрим задачу определения время выхода решения на границу. Согласно известным теоремам о продолжении решения на максимальный интервал (теорема 3.1, гл. 2 [39]) для задачи (VIII.16) существует такое число $T > 0$, что $(z(T), T) \in \partial Q \times (0, T]$. В прикладных задачах важно уметь вычислять это число для заданного начального условия. Покажем, что это число можно конструктивно вычислить с любой точностью по формулам (VIII.21).

Для задачи (VIII.16) определим функционал $P_1[z, t]$ следующим образом: $P_1[z, t'] = 0$, если $z(t) \in Q$ при всех $t \in [0, t')$, и $P_1[z, t'] = 2$, если либо $t' = T$, либо $z(t') \in \partial Q$.

Условие 8. Для функции f существует такое $\epsilon > 0$, что функция f равна нулю не более чем в конечном числе точек в ϵ -окрестности ∂Q .

Теорема 21.6. Пусть выполнено условие 8. Тогда для задачи (VIII.16) с функционалом переключения P_1 выполнены условия 5-7 и, соответственно, верна теорема 21.5.

Доказательство. Условия 5 и 6 выполнены по определению функционала P_1 . Покажем, что выполнено и условие 7. Согласно условию 8 решение задачи (VIII.19) пересекает множество $K = \{\partial Q \times (0, T]\} \cup \{(z, T) : z \in \bar{Q}\}$ лишь в одной точке (z', t') , в которой происходит переключение.

Пусть z^N последовательность сходящаяся к решению z задачи (VIII.19) в $W_\infty^1(0, 2T; \mathbb{R}^n)$. Момент переключения для функции z^N совпадает с величиной t^N такой, что $z(t^N) \in K$. В силу кусочной гладкости границы ∂Q существует такое $\epsilon > 0$, что пересечение множества

$$Z_\epsilon = \{(\bar{z}, t) : |\bar{z} - z(t)| < \epsilon, t \in (0, T]\}$$

с множеством K содержится в шаре $\{(z(t'), t') - (\bar{z}, t)| < \epsilon\}$. Поскольку z^N равномерно сходится к z , то для любого $\epsilon > 0$ существует такое $N = N(\epsilon)$, что $\{(z^N(t), t) : t \in (0, T]\} \in Z_\epsilon$. Устремляя ϵ к нулю, мы получаем, что $t^N \rightarrow t'$ при $N \rightarrow \infty$. \square

Уравнения (II.18) представляют собой уравнения в частных производных, однако эти уравнения могут быть приближены системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти уравнения являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций:

$$\begin{aligned} r_1(t), r_2(t), \dots, r_N(t); \\ v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t). \end{aligned}$$

Покажем, каким образом можно приближенно восстановить профиль поверхностной волны, зная значения функций $r_k(t)$. Определим ком-

плоскостные числа $c_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$ как решение системы:

$$c_0 = 1,$$

$$\sum_{j=0}^k c_{k-j}(t)r_j(t) = 0, k = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Зная значения $c_k(t)$ при фиксированном t , построим две вещественные функции:

$$x(u, t) = u + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{-ik} c_k(t) e^{-iku} \right),$$

$$y(u, t) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{-ik} c_k(t) e^{-iku} \right).$$

Тогда профиль поверхностной волны определяется кривой:

$$\Gamma(t) = \{(x(u, t), y(u, t)) : u \in [0, 2\pi]\}.$$

Введем функционал

$$\varphi : \mathbb{R} \times C^1[0, 2\pi] \times C^1[0, 2\pi]$$

следующим образом:

$$\varphi(\varepsilon, x(u, \cdot), y(u, \cdot)) = \inf_{\substack{0 \leq u_1 < u_2 \leq 2\pi, \\ u_2 - u_1 > \varepsilon}} \frac{\sqrt{(x(u_1) - x(u_2))^2 + (y(u_1) - y(u_2))^2}}{\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{x_u^2(u) + y_u^2(u)} du},$$

где $\varepsilon > 0$. Определим этот функционал на таких функциях, что $x_u^2(u) + y_u^2(u) > a > 0$. На этом множестве функционал φ будет непрерывным.

Очевидно, что этот функционал не превосходит 1. Будем использовать следующее обозначение $\varphi(\varepsilon, \Gamma(\cdot)) = \varphi(\varepsilon, x(u, \cdot), y(u, \cdot))$. Функционал φ будем использовать в качестве индикатора отсутствия самопересечения кривой $\Gamma(t)$. Если при t' имеет место $\varphi(\varepsilon, \Gamma(t')) > 0$ — это означает, что в точке t' кривая не имеет самопересечения, если же значение функционала φ будет равно нулю, то в этом случае мы будем прекращать вычисления, считая, что произошло самопересечение.

Таким образом, мы будем рассматривать систему обыкновенных дифференциальных уравнений в области Q , которую зададим следующим образом:

$$Q = \{|r_k| < e^{-sk}, |v_k| < Me^{-sk}; k = 1, 2, \dots, N\},$$

где $M > 0$ и $s > 0$ фиксированные числа. Введем обозначение

$$z(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_N(t), v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t))^T.$$

Вместе с функционалом переключения $P_e[t, z]$, который мы определим следующим образом: пусть фиксированы такие положительные числа ε, a , что

$$\varphi(\varepsilon, \Gamma(0)) > 0,$$

соответственно, в начальный момент времени значение функционала $P_e[0, z]$ равно нулю, значение 1 функционал $P_e[t, z]$ принимает для тех t , для которых существует $t' \leq t$ такое, что $\varphi(\varepsilon, \Gamma(t')) = 0$. Наконец, в случае достижения решением границы ∂Q , функционал принимает значение 2.

Условия 5 и 6 выполнены по построению функционала P_e , а условие 7 будет выполнено вследствие непрерывности функционала φ . Таким образом для нашей задачи с функционалом переключения P_e верна теорема 21.5.

Теорема 21.5 показывает, что в нашу задачу с функционалом переключения можно исследовать стандартными численными методами.

22. Вычислительная устойчивость решений, описывающих волны-убийцы

22.1. Корректность определения волны-убийцы

Для того, чтобы исследовать устойчивость волн-убийц мы должны ввести формальное определение волн-убийц. Единого определения волны-убийцы в океане нет. Общепринятым критерием волн-убийц является амплитудный критерий. Этот критерий формулируется на основе понятия значительной высоты волнения. Пусть в каждый момент времени мы имеем периодический по переменной x профиль волны $y = y(x)$, который имеет N локальных максимумов M_i и столько же локальных минимумов m_i . Введем величины $h_i = M_i - m_i$, которые

имеют смысл высот элементарных волн. Перенумеруем $\{h_i\}_{i=1}^N$, так чтобы высоты волн располагались в порядке убывания

$$h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_N.$$

Тогда значительная высота волнения H_s будет равна

$$H_s = \frac{1}{[(N+2)/3]} \sum_{i=1}^{[(N+2)/3]} h_i.$$

Таким образом, значительная высота волнения есть средняя высота трети самых высоких волн. В работе [3] рассматривались некоторые проблемы, связаны с понятием значительной высоты волнения.

Согласно амплитудному критерию говорят, что волна с высотой H_{max} есть волна-убийца, если выполнено неравенство

$$\frac{H_{max}}{H_s} > A^* = 2.1.$$

Иногда в литературе используют другие значения для критического значения A^* .

Несложно показать, что такое определение не является устойчивым по отношению к малым изменениям профиля волны. Это обстоятельство является серьезным препятствием для использования этого определения в вычислительных экспериментах. Поэтому в работе [14] при вычислении вероятностей возникновения волн-убийц был использован другой критерий для волн-убийц.

Чтобы сформулировать этот критерий рассмотрим следующий функционал

$$\nu(y) = \frac{\max_{u \in [0, 2\pi], t \in [0, T]} y(u, t)}{\frac{1}{T} \int_0^T \max_{u \in [0, 2\pi]} |y(u, t)| dt}, \quad (\text{VIII.23})$$

определенный на множестве

$$K_a([0, 2\pi] \times [0, T]) = \{y(u, t) : y(u, t) \in C^1([0, 2\pi] \times [0, T]) \\ \text{и } \mu\{(u, t) : y(u, t) \neq 0\} \geq a > 0\}$$

где μ — мера Лебега на плоскости, параметр $a > 0$ играет техническую роль.

Определение 22.1. Будем говорить, что профиль $y \in K_a$ представляет собой волну убийцу, если

$$\nu(y) > A_\nu = 1.8.$$

Конкретное значение $A_\nu = 1.8$ было получено эмпирически после обработки большого количества вычислительных экспериментов и количественно соответствует амплитудному критерию, рассмотренному выше.

Покажем, что на этом множестве функционал ν является непрерывным. Для этого докажем вспомогательную лемму.

Лемма 22.1. Пусть $y(x) \in C[a, b]$, $y_n(x)$ последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций, сходящаяся равномерно к $y(x)$. Тогда

1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{x \in [a, b]} y_n(x) = \min_{x \in [a, b]} y(x)$$

2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} y_n(x) = \max_{x \in [a, b]} y(x)$$

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть

$$x_0 \in \operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} y(x),$$

$$x_n \in \operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} y_n(x).$$

Покажем, что

$$y_n(x_n) \rightarrow y(x_0).$$

Предположим, что это не так. Тогда для любого n найдется $\delta > 0$ такая что

$$O_\delta(A_n) \cap O_\delta(B) = \emptyset,$$

где $A_n = (x_n, y_n(x_n))$, $B = (x_0, y(x_0))$. В силу равномерной сходимости мы можем считать δ не зависящим от x . Обозначим $C_n = (x_n, y(x_n))$ и $D_n = (x_0, y_n(x_0))$. В силу того, что $y_n \rightarrow y$, мы можем взять δ сколь угодно малым и так, что будет выполняться $A_n \in O_\delta(C_n)$ и $D_n \in O_\delta(B)$. Видим, что если

$$x_n \notin \operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} y(x),$$

то получаем

$$y_n(x_n) > y_n(x_0).$$

Следовательно получаем противоречие. Если же

$$x_n \in \operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} y(x),$$

то и по-прежнему $y_n(x_n) \rightarrow y(x_0)$.

Заменой y на $-y$ и y_n на $-y_n$ получаем справедливость утверждения. \square

Теорема 22.1. *Функционал ν является непрерывным на множестве K_a .*

Доказательство. По лемме (22.1) числитель в (VIII.23) непрерывен как композиция непрерывных. Из тех же соображений непрерывен и знаменатель. Кроме того, из определения множества K_a ($[0, 2\pi] \times [0, T]$) следует, что знаменатель в (VIII.23) не обращается в нуль. Следовательно, критерий ν является непрерывным на множестве функций K_a ($[0, 2\pi] \times [0, T]$). \square

22.2. Устойчивость решений уравнений

В параграфе 4.3 был описан способ восстановления профиля поверхностной волны по значениям функции $R(u, t)$. Пусть

$$\Gamma(t) = \{(x(u, t), y(u, t)) : u \in [0, 2\pi]\}$$

— профиль, восстановленный по функции $R(u, t)$;

$$\Gamma^\varepsilon(t) = \{(x^\varepsilon(u, t), y^\varepsilon(u, t)) : u \in [0, 2\pi]\}$$

— профиль, восстановленный по функции $R^\varepsilon(u, t)$.

Покажем, что фиксированном значении t имеет место

$$\Gamma^\varepsilon \rightarrow \Gamma, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Теорема 22.2. *Пусть $(R^\varepsilon, V^\varepsilon)$ — решение задачи (VII.25), а (R, V) есть решение задачи (II.18) при $t \in [0, T]$. Тогда, если при фиксированном значении $t \in [0, T]$ имеет место $|\Gamma(t) - \Gamma^\varepsilon(t)| \rightarrow 0$.*

Доказательство. По определению функции $R(u, t)$ имеем

$$\frac{1}{R(u, t)} = x_u(u, t) + iy_u(u, t)$$

$$\frac{1}{R^\varepsilon(u, t)} = x_u^\varepsilon(u, t) + iy_u^\varepsilon(u, t)$$

Следовательно,

$$x_u(u, t) - x_u^\varepsilon(u, t) + i(y_u(u, t) - y_u^\varepsilon(u, t)) = \frac{R^\varepsilon(u, t) - R(u, t)}{R(u, t)R^\varepsilon(u, t)}.$$

Имеем оценку

$$\begin{aligned} & |x_u(u, t) - x_u^\varepsilon(u, t) + i(y_u(u, t) - y_u^\varepsilon(u, t))| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{R(u, t)R^\varepsilon(u, t)} \right| \cdot |R^\varepsilon(u, t) - R(u, t)|. \end{aligned}$$

В силу того, что функции R и R^ε принадлежат множеству M_T^s для всех $t \in [0, T]$ и $u \in [0, 2\pi]$

$$\left| \frac{1}{R(u, t)R^\varepsilon(u, t)} \right| \leq c_1,$$

а по лемме 1 из [53] следует, что равномерно по t и u имеет место

$$|R^\varepsilon(u, t) - R(u, t)| \rightarrow 0.$$

Таким образом

$$|x_u(u, t) - x_u^\varepsilon(u, t)| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$|y_u(u, t) - y_u^\varepsilon(u, t)| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

поскольку

$$x(u, t) - x^\varepsilon(u, t) = \int_0^u (x_u(u, t) - x_u^\varepsilon(u, t)) du,$$

$$y(u, t) - y^\varepsilon(u, t) = \int_0^u (y_u(u, t) - y_u^\varepsilon(u, t)) du,$$

$$|x(u, t) - x^\varepsilon(u, t)| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$|y(u, t) - y^\varepsilon(u, t)| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Это и означает сходимость Γ^ε к Γ . □

Теорема 22.3. Пусть $(R^\varepsilon, V^\varepsilon)$ — решение задачи (VII.25), а (R, V) есть решение задачи (II.18) при $t \in [0, T]$. Предположим, что при каждом $t \in [0, T]$ кривые $\Gamma^\varepsilon(t)$ и $\Gamma(t)$ представляют собой график функций $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$, где $\bar{x} \in [0, 2\pi]$. Тогда если при некотором $t^* \in [0, T]$ решение (R, V) представляет собой волну-убийцу, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ решение $(R^\varepsilon, V^\varepsilon)$ тоже представляет собой волну-убийцу.

Доказательство. Из теоремы 22.2 следует, что

$$\|\bar{y} - \bar{y}^\varepsilon\|_{C[0,2\pi]} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

а из теоремы 22.1 следует, что

$$\nu(\bar{y}) \rightarrow \nu(\bar{y}).$$

Поэтому если $\nu(\bar{y}) = A' > A^*$, то для достаточно малого ε имеет место $\nu(\bar{y}^\varepsilon) > A^*$. \square

Замечание 22.1. Теорема 22.3 допускает обращение. Именно, если для всех достаточно малых ε решения $(R^\varepsilon, V^\varepsilon)$ представляют собой волну-убийцу, то и решение (R, V) будет представлять собой волну-убийцу.

22.3. Эксперименты по устойчивости волн-убийц при внешних воздействиях

Как мы уже отмечали, волна-убийца представляет собой экстремальный эффект, поэтому возникает важный вопрос об устойчивости волн-убийц. В вычислительных экспериментах мы наблюдаем возникновение волн-убийц, как приближенные решения исходных эволюционных уравнений. Следовательно, нам необходимо убедиться в вычислительно устойчивости решений, описывающих волны-убийцы. Мы рассмотрим вопрос устойчивости при внешних воздействиях. Мы будем исследовать на устойчивость решения системы (II.18).

Для исследования вычислительной устойчивости решений, описывающих волны-убийцы по начальным данным, мы будем проводить следующие вычислительные эксперименты. Выберем эталонное множество начальных условий, для которых при решении системы (II.18) мы наблюдаем возникновение волн-убийц. После чего для каждого начальных условий из этого множества мы будем многократно решать при наличии случайных внешних воздействий на свободную поверхность.

Рассмотрим эксперимент, в котором возмущение было случайной внешней силой, действующей на поверхность волны. Плотность внешней силы была следующая:

$$F_x(t, x) = A\xi_x(t) \sin(K(t)x),$$

$$F_y(t, x) = A\xi_y(t) \sin(K(t)x),$$

где $\xi_x(t), \xi_y(t)$ — независимые случайные процессы равномерно распределенные на $[-0.5, 0.5]$. $K(t)$ — случайный процесс, принимающий значения $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ с одинаковой вероятностью, $A = 10^{-6}$.

Таким образом, мы рассматриваем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} R_t(u, t) &= i(U(u, t)R_u(u, t) - U_u(u, t)R(u, t)) \\ &\quad - \alpha R_{uuuu}(u, t), \\ V_t(u, t) &= i(U(u, t)V_u(u, t) - B_u(u, t)R(u, t)) + g(R(u, t) - 1) \\ &\quad - \alpha V_{uuuu}(u, t) + F(t, u), \end{aligned} \quad (\text{VIII.24})$$

$$0 < u < 2\pi, \quad 0 < t < T,$$

$$R(0, t) = R(2\pi, t), \quad V(0, t) = V(2\pi, t), \quad 0 < t < T,$$

$$R(u, 0) = R_0(u), \quad V(u, 0) = V_0(u), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Здесь $F(t, u) = F_x(t, u) - iF_y(t, u)$ — плотность возмущающей внешней силы.

Из результатов главы VII мы имеем следующий теоретический результат. Пусть при $A = 0$, когда внешнее возмущение отсутствует, задача (VIII.24) имеет решение при $t \in [0, T]$. Обозначим это решение через R^* и V^* . Через R^A и V^A обозначим решение системы (VIII.24) для $A > 0$. Решение (R^A, V^A) существует, вообще говоря, на отрезке $[0, T_A]$, где $T_A > 0$. Из теоремы 20.1 можно получить, что:

1. $T_A \rightarrow T$,
2. $R^A \rightarrow R^*$, $V^A \rightarrow V^*$,

при $A \rightarrow 0$. Этот результат означает, задача (II.18) является устойчивой относительно внешних возмущений правой части.

При проведении вычислительных экспериментов необходимо убедиться не только в теоретической устойчивости системы уравнений относительно малых внешних возмущений, но и в вычислительной устойчивости расчетной схемы. Такая «практическая» устойчивость была установлена в результате большой серии вычислительных экспериментов. На следующем рисунке мы приведем результат одного из таких численных опытов.

Здесь сплошной линией изображена волна без возмущений, а точечной линией — волна с возмущением.

Хотя возмущенное решение заметно отличается от исходного решения, но профили максимальной волны весьма похожи, и время образования волны-убийцы совпадает. Отсюда можно сделать вывод об устойчивости такого явления природы как волны-убийцы относительно внешних сил.

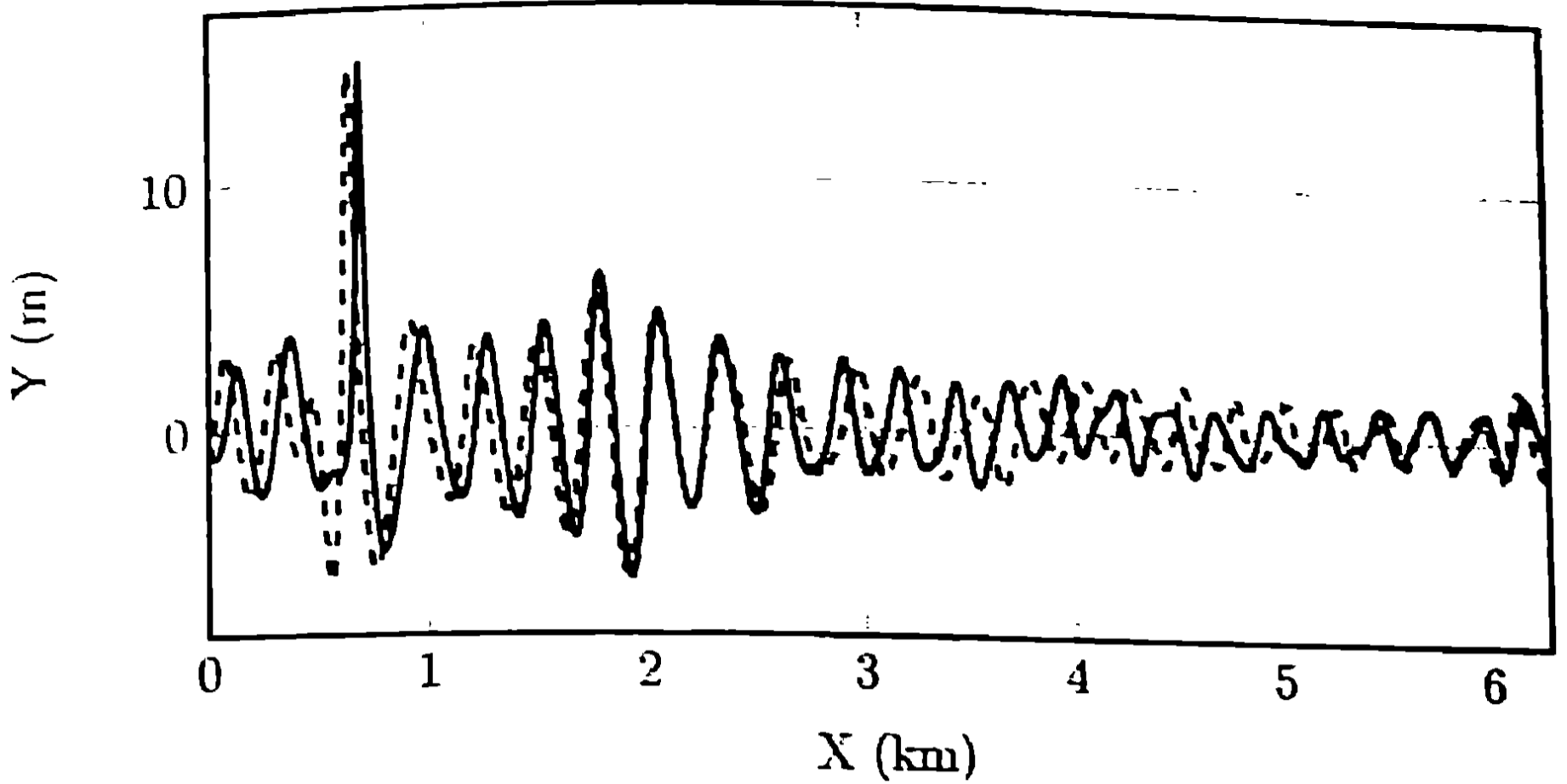


Рис. VIII.6. Возмущение волны-убийцы

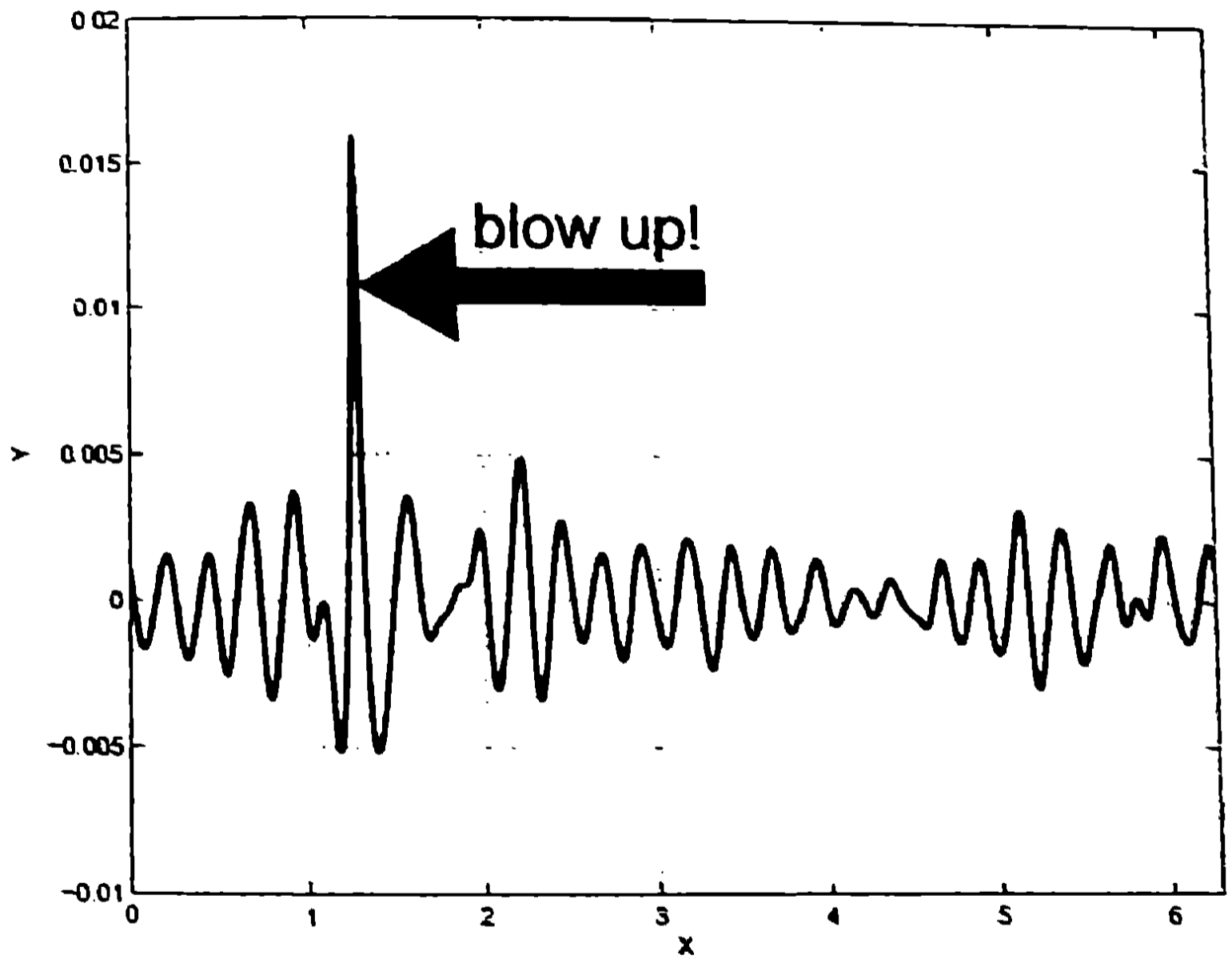


Рис. VIII.7. Гипотетический удар по волне-убийце

Можно рассматривать в каком-то смысле и обратную задачу — задачу об разрушении волны-убийцы в момент ее формирования с помощью внешнего воздействия. Это воздействие уже не должно быть малым. Основная идея состоит в том, чтобы моделировать импульсный удар по поверхности воды в момент возникновения волны-убийцы. Схема разрушения возникающей волны-убийцы показана на следующем рисунке.

Заметим, что первые результаты вычислительных опытов показали, что проблема разрушения волны-убийцы является весьма сложной.

Заключение

В нашей книге, посвященной волнам-убийцам в океане, мы хотели показать, что волны-убийцы представляют собой удивительный феномен нелинейной динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. Конечно, существует большое количество гипотез и конструкций, объясняющих возникновение волн-убийц в результате встречных течений, действия ветра, влияния рельефа дна и других причин. Все эти и иные факторы могут оказывать свое влияние на образование волн-убийц, однако наши результаты убеждают, что волны-убийцы — это результат именно нелинейной динамики, рассматриваемой динамической системы. Поэтому на вопрос «почему возникают волны-убийцы?» можно ответить: «Возникновение экстремальных поверхностных волн предопределено уравнениями Эйлера, описывающими нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью». Конечно, это лишь формальный ответ, но с помощью доказательных вычислений, представленных в настоящей книге, можно «получить на руки» волну-убийцу, чтобы внимательно ее «пощупать».

В результате разнообразных численных опытов, результаты которых приведены в книге, можно понять, какими статистическими и качественными характеристиками обладают волны-убийцы. Полученные нами результаты позволяют понять внутреннее устройство волн-убийц и оценить их опасность для кораблей и морских сооружений.

В настоящей книге мы рассматривали только двумерное волнение в то время, как хорошо известно, что трехмерная структура морского волнения играет существенную роль. Отчасти это связано с тем, что пока нет хороших алгоритмов для проведения масштабных вычислительных экспериментов по моделированию трехмерного течения на больших временных интервалах и с большой точностью. Но главная причина состоит в том, что для исследования волн-убийц основной интерес представляют именно двумерные волны. Дело в том, что основная «питательная среда» для формирования волн-убийц — это волны

зыби, динамика которых может быть хорошо описана с помощью двумерных моделей. С другой стороны, трехмерные волны-убийцы (есть свидетельства таких волн), по-видимому, живут короткое время и заметают небольшую площадь в то время, как плоские волны-убийцы живут несколько минут и могут покрыть десятки квадратных километров в океане, следовательно, наибольшую опасность представляют именно двумерные волны-убийцы.

Впрочем, построение эффективных методов для оценки степени опасности волн-убийц — дело ближайшего времени. Необходимо выработать рабочие методики и практические рекомендации для снижения риска опасного воздействия волн-убийц на морские суда и прибрежные сооружения, поскольку традиционные стандарты прочности часто исходят из линейных (гауссовых) оценок максимальных поверхностных волн и приводят к заниженным оценкам максимального волнения. Вероятно, уточнение опасности волн-убийц может заинтересовать страховые компании в области судоходства.

Мы уже отмечали, что волны-убийцы представляют собой явление внезапной концентрации энергии. Этот эффект наблюдается во многих сферах жизнедеятельности. В частности, рассмотрим аналогичные эффекты в экономической сфере. В качестве энергии будем рассматривать деньги, а вместо отдельных волн рассмотрим экономические субъекты. Если в начальный момент субъекты имеют примерно одинаковое количество денег, то в результате хозяйственной деятельности через некоторое время возникнет определенное меньшинство, которое будет владеть большей частью денег (энергией). Подобные механизмы возникновения социального неравенства рассматривались во многих работах, например [69]. Возникшие отдельные «олигархи» являются аналогами волн-убийц.

Еще одну финансовую аналогию можно увидеть во внезапном изменении котировок акций или валюты на биржах. Как правило, эти котировки совершают равномерные колебания, но внезапно под воздействием каких-либо факторов происходит резкое изменение курса. Здесь можно провести аналогию между факторами, влияющими на котировки, и внутренними факторами нелинейной системы, описывающей динамику поверхностных волн. Ведь замечено, что возникновению волны-убийцы предшествует длительная подготовка...

Однако при изучении волн-убийц следует обращать особое внимание на механизмы возникновения экстремальных волн, а не только на сами факты аномальных волн. В случае волн-убийц в океане эти механизмы «защиты» в уравнения Эйлера, так же как турбулентность в уравнениях Навье-Стокса. Открытым является вопрос — насколько

ко эти механизмы схожи, есть ли у них общие черты? имеют ли они одинаковую кинематику? Разумеется, как и в любой научной области вопросов здесь больше, чем ответов.

Для всестороннего изучения волн-убийц нами был создан Научный центр по изучению волн-убийц (www.gogueswaves.ru), который функционирует на кафедре Математического моделирования в космических системах Российского университета дружбы народов.

Хотя мы имеем полные записи решений, описывающих волны-убийцы, пока еще далеко до полного понимания механики возникновения этого явления. Впереди еще большое поле для деятельности. Нам представляется плодотворным следующий подход для изучения волн-убийц. Во-первых, с помощью вычислительных экспериментов производить разнообразные наблюдения для динамики поверхностных волн, получая детальные записи явления возникновения волн-убийц. Во-вторых, на основании экспериментальных данных (хотя и полученных с помощью моделирования) строить теоретическое описание наблюдаемого эффекта. В-третьих, строить новые математические модели (динамические и кинематические) с использованием различного математического аппарата, и прежде всего теории случайных процессов, дифференциальных уравнений в частных производных и динамических систем, теории игр и др.

Таким удивительным образом изучение волн-убийц с помощью вычислительных экспериментов представляет собой как экспериментальную, так и теоретическую работу, как работу физика, так и работу математика. При этом нужно быть специалистом в области современных численных методов и владеть искусством промышленного программирования. Все это делает научную работу в области волн-убийц особенно интересной и привлекательной.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. — М.: Мир. 1972.
- [2] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987.
- [3] Боуден К. Физическая океанография прибрежных вод. — М.: Мир, 1988.
- [4] Василенко В. А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. — Новосибирск: Наука, 1983.
- [5] Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
- [6] Голицын Г.С. Энергетический цикл волн на поверхности океана // Изв. АН. ФАО. 2010. Т. 46. N 1. С. 10–18.
- [7] Гюнтер Н.М. Об основной задаче гидродинамики // Известия Физико-математического института им. В. А. Стеклова. — 1927. — 2. — С. 1–168.
- [8] Дивинский Б.В., Косьян Р.Д., Подымов И.С., Пупкарев О.В. Экстремальное волнение в северо-восточной части Черного моря в феврале 2003 г. // Океанология. 2003. Т. 43. N 6. С. 948–950.
- [9] Дивинский Б.В., Левин Б.В., Лопатухин Л.И., Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В. Аномально высокая волна в Черном море: наблюдения и моделирование // ДАН, 2004, т. 395, N 5, с. 690–695.
- [10] Доброхотов С.Ю. Методы Маслова в линейной теории гравитационных волн на поверхности жидкости // ДАН СССР. 1983. Т. 28. С. 229–231.
- [11] Дьяченко А. И., Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости // Физика плазмы. — 1999. — 22, N 10. — С. 916–928.
- [12] Зайцев А.И., Малашенко А.Е., Пелиновский Е.Н. Аномально большие волны вблизи Южного побережья о.Сахалин // Там же. 2011. Т.4, № 4. С.35--42.

- [13] Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // Прикладная механика и теоретическая физика. — 1968. — N 2. — С. 86–94.
- [14] Захаров В.Е., Шамин Р.В. О вероятности возникновения волн-убийц // Письма в ЖЭТФ, 2010, т. 91, вып. 2, с. 68–71.
- [15] Захаров В.Е., Шамин Р.В. Статистика волн-убийц в вычислительных экспериментах // Письма в ЖЭТФ, 2012, том 96, вып. 1, с. 68–71.
- [16] Захаров В.Е., Шамин Р.В., Юдин А.В.. Энергетический портрет волн-убийц // Письма в ЖЭТФ, 2014, том 99, вып. 9, с. 597 – 600.
- [17] Захаров В.Е., Шамин Р.В., Юдин А.В.. Типичные профили волн-убийц // Доклады Академии наук, 2015, т. 462, № 1, с. 100–102.
- [18] Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986.
- [19] Коддингтон Э. А., Левинсон Н.. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Издательство ЛКИ, 2007.
- [20] Кузнецов С.Ю., Дулов В.А., Сапрыкина Я.В., Доценко С.Ф., Малиновский В.В., Полников В.Г., Шокуров М.В. Экстремально опасные штормовые условия в Черном море: МГИ НАН Украины. — Севастополь, 2011. — С. 66.
- [21] Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. — Нижний Новгород: Нижегородский гос. тех. университет, 2004.
- [22] Лавренов И.В. Встреча с волной-убийцей // Морской флот. 1985. N 12. С. 28–30.
- [23] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003.
- [24] Методы прогнозирования природных катастроф. Ч.1. Статистические методы прогноза: учеб. пособие / Е.Н. Пелиновский, Т.Г. Талипова, И.И. Диденкулова, А.А. Куркин; Нижегородский гос. тех. университет им. Р.Е. Алексеева. — Нижний Новгород, 2014.
- [25] Налимов В. И. Априорные оценки решений эллиптических уравнений в классе аналитических функций и их приложения к задаче Коши—Пуассона // Докл. АН. — 1969. — 189, N 1. — С. 45–49.

- [26] Налимов В. И. Задача Коши—Пуассона // Динамика сплошной среды. — 1974. — 18. — С. 104–210.
- [27] Налимов В. И. Нестационарные вихревые волны // Сиб. мат. журн. — 1996. — 37, N 6. — С. 1356–1366.
- [28] Некрасов А. И. О волнах установившегося вида // Известия Иваново-Вознесенского политехнического института. — 1921. — 3. — С. 52–65.
- [29] Некрасов А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. — М.: Издательство АН СССР, 1951.
- [30] Никитов А. А. «Русалка» найдена! // Природа. 2004. N 10. С. 93–96.
- [31] Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977.
- [32] Овсянников Л. В. Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств // Докл. АН. — 1971. — 200, N 4. — С. 789–792. +
- [33] Овсянников Л. В. К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / Акад. наук СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. - Новосибирск, 1973. - Вып.15. - С.104–125.
- [34] Пелиновский Е. Н., Хариф К. Дисперсионное сжатие волновых пакетов как механизм возникновения аномально высоких волн на поверхности океана // Изв. ФИАН РФ. 2000. Т. 1. С. 50–61.
- [35] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
- [36] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.
- [37] Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986.
- [38] Уизем Дж. Линеиные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
- [39] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

- [40] Шамин Р. В. Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сиб. журн. выч. мат. — 2006. — 9, N 4. — С. 325–340.
- [41] Шамин Р. В. О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. — 2006. — 406, N 5. — С. 112–113.
- [42] Шамин Р. В. К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши—Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 21. — С. 133–148.
- [43] Шамин Р. В. О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Мат. сб. — 2003. 194, N 9. — С. 1411–1426.
- [44] Шамин Р. В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. — М.: Наука, 2008.
- [45] Шамин Р. В. Об оценке времени существования решений уравнения, описывающего поверхностные волны // Докл. АН. — 2008. — 418, N 5. — С. 112–113.
- [46] Шамин Р. В. Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: РУДН, т. 28, 2008, с. 3–144.
- [47] Шамин Р. В. Поверхностные волны на воде минимальной гладкости // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 35 (2010). С. 126–140.
- [48] Шамин Р. В. Разрешимость уравнений, описывающих волны минимальной гладкости // Доклады Академии наук, 2010, т. 432, N 4, с. 458–460.
- [49] Шамин Р. В. Аппроксимация эволюционных дифференциальных уравнений в шкалах гильбертовых пространств // Математические заметки. Том 85. 2009. N 2. С. 318–320.
- [50] Шамин Р. В. Регуляризация метода прямых в условиях машинной точности с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Вычислительные технологии. Том 13. 2008. N 5. С. 113–124.

- [51] Шагин Р.В. Пространства начальных данных для параболических функционально-дифференциальных уравнений // Математические заметки, 2002, т. 71, вып. 4, с. 636-640.
- [52] Шагин Р.В. Модели ветрового волнения на основе функционально-дифференциальных уравнений // Актуальные проблемы фундаментальной и прикладной математики: сб. науч. тр. М.: МФТИ. 2009. - С. 143-149.
- [53] Шагин Р.В. Моделирование волн-убийц на основе эволюционных дифференциальных включений // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2012. Т. 15. N 1.
- [54] Шагин Р.В., Юдин А.В., Техонов Д.Е. О законе распределения времени ожидания волн-убийц // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. 2015. № 2, том 109. С. 40-48.
- [55] Шагин Р.В., Юдин А.В. Процессы концентрации энергии при образовании волн-убийц // Нелинейная динамика, 2014, т.10, №1, с. 49-58.
- [56] Шагин Р.В., Юдин А.В. Моделирование пространственно-временного распространения волн-убийц // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448. N 5. С. 592-594.
- [57] Шагин Р.В., Горленко А.В., Смирнова А.И. Вопросы устойчивости волн-убийц // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. № 1. С. 96-105.
- [58] Шагин Р.В., Кузнецов К.И. Об оценке опасности аномальных поверхностных волн // Вестник ДВО РАН. 2013. N 3. С. 65-68.
- [59] Шагин Р.В. Оценка вероятности встречи с волной-убийцей в Охотском море // Вестник ДВО РАН. 2013. №6. С. 116-119.
- [60] Юдович В.И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // Журнал выч. мат. и мат. физ. — 1963. — 3, N 6. — С. 1032-1066.
- [61] Badulin S.I., Babanin A.V., Resio D., Zakharov V. Weakly turbulent laws of wind-wave growth // J. Fluid Mech. 2007. V. 591. P. 339-378.
- [62] Badulin S.I., Shrira V.I., Kharif C., Iualalen M. On two approaches to the problem of instability of short-crested water waves // J. Fluid Mech. 1995. V. 303. P. 297-325.

- [63] Bateman W.J.D., Swan C., Taylor P.H. On the efficient numerical simulation of directionally spread surface water waves // *J. comput. Physics*, 2001, v. 174, pp. 277–305.
- [64] Brown M.G., Jensen A. Experiments on focusing unidirectional water waves // *J. Geophys. Research*. 2001. V. 106. N C6. P. 16917–16928.
- [65] Brown M.G. The Maslov integral representation of slowly varying dispersive wavetrains in inhomogeneous moving media // *Wave Motion*. 2000. V. 32. P. 247–266.
- [66] Chalikov D. Freak waves: Their occurrence and probability // *Phys. Fluids*, 2009, v. 21, issue 7.
- [67] Chalikov D., Sheinin D. Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // *Journ. Comp. Phys*. 2005. 210. P.247-273.
- [68] Craig W., Sulem C. Numerical simulation of gravity waves// *J. Comput. Phys.* — 1993. — 108. — C. 73–83.
- [69] Dragulescu A., Yakovenko V.M. Statistical mechanics of money // *The European Physical Journal B*. 2000. V. 17. P. 723–729.
- [70] Dyachenko A.I., Zakharov V.E., On the Formation of Freak Waves on the Surface of Deep Water // *Письма в ЖЭТФ*, 2008, т. 88, N 5, с. 356–359.
- [71] Dysthe K.B., Trulsen K. Note on breather type solutions of the NLS as a model for freak-waves // *Physica Scripta*. 1999. V. 82. P. 48–52.
- [72] Gulev S.K., Grigorieva V. Last century changes in ocean wind wave height from global visual wave data // *Geophys. Res. Lett.* 2004, v. 31. L24302.
- [73] Gurevich P.L., Shamin R.V., Tikhomirov S.B. Reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis. *SIAM J. Math. Anal.* Vol. 45, No. 3 (2013). P. 1328-1355.
- [74] Henderson K.L., Peregrine D.H., Dold J.W. Unsteady water wave modulations: fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrodinger equation // *Wave Motion*, 1999, v. 29, pp. 341–361.

- [75] Johannessen T.B., Swan C. A laboratory study of the focusing of transient and directionally spread surface water waves // Proc. Royal Soc. London. 2001. V. A457. P. 971–1006.
- [76] Kano T., Nishida T. Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde, J. Math. Kyoto Univ., 19:2 (1979), 335–370.
- [77] Kato T. On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation // ARMA. — 1967. — 25. — C. 188–200.
- [78] Korotkevich A.O., Pushkarev A.N., Resio D., Zakharov V.E. Numerical verification of the weak turbulent model for swell evolution, Eur. J. Mech. B - Fluids, 27(4), 361-387 (2008).
- [79] Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue Waves in the Ocean. Springer, 2009.
- [80] Lannes D. Well-posedness of the water-waves equations, J. Amer. Math. Soc., 18:3 (2005), 605–654.
- [81] Lichtenstein L. Grundlagen der Hydromechanik. — Berlin, 1929.
- [82] Levi-Civita T. Determination rigoureuse des ondes permanentes d'amplitude finie // Math. Ann. — 1925. — 93. — C. 264–314.
- [83] Nikolkina I., Didenkulova I. Rogue waves in 2006–2010 // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2011. V. 11, N 11. P. 2913-2924.
- [84] Nishida T. A note on a theorem of Nirenberg // J. Differential Geom. — 1977. — 12. — C. 629–633.
- [85] Peregrine D.H. Interaction of water waves and currents // Advanced Applied Mech. 1976. V. 16. P. 9–17.
- [86] Pelinovsky E., Talipova T., Kharif C. Nonlinear dispersive mechanism of the freak wave formation in shallow water // Physica D. 2000. V. 147. N 1–2. P. 83–94.
- [87] Ruban V.P. Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows // Phys. Lett. A. 2005. V. 340. №1-4. P. 194-200.
- [88] Shamin R.V. About Analytic Solvability of Nonstationary Flow of Ideal Fluid with a Free Surface // Alexey V. Borisov, Valery V. Kozlov, Ivan S. Mamaev and Mikhail A. Sokolovskiy.

IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence. Springer Netherlands, 2008. P. 323-329.

- [89] Shamin R.V., Moiseeva S.N. Functional Differential Equations and Freak Waves. *Functional Differential Equations*, v. 16, 2009, No 4, pp. 627-637.
- [90] Stokes G.G. *Mathematical and physical papers*. Cambridge University Press. —1. —1880.
- [91] White B.S., Fornberg B. On the change of freak waves at the sea // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 225. P. 113–138.
- [92] Whitney J.C. The numerical solution of unsteady free-surface flows by conformal mapping // In: *Proc. Second Inter. Conf. on Numer. Fluid Dynamics* (ed. M. Holt). 1971. Springer-Verlag. P. 458-462.
- [93] Wu S. Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 2-D, *Invent. Math.*, 130:1 (1997), 39–72.
- [94] Wu S. Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D// *J. Amer. Math. Soc.* — 1999. — 12, N 2. — C. 445–495.
- [95] Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface// *Eur. J. Mech. B Fluids*. — 2002. — 21. — C. 283 – 291.
- [96] Zakharov V.E., Dyachenko A.I, Prokofiev A.O. Freak waves as nonlinear stage of Stokes wave modulation instability// *Eur. J. Mech. B Fluids*. 2006. 25. P. 677–692.
- [97] Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Shamin R.V. How probability for freak wave formation can be found // *The European Physical Journal - Special Topics*. 2010. Volume 185, Number 1, 113-124, DOI: 10.1140/epjst/e2010-01242-y.